Integración fraccionaria iterada : Un problema de Ross en conexión con espacios funcionales

Peña, Carlos Cesar

1995

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Integración fraccionaria iterada. Un problema de Ross en conexión con espacios funcionales

Carlos César Peña

Universidad de Buenos Aires

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemáticas

1995

Integración fraccionaria iterada. Un problema de Ross en conexión con espacios funcionales

Trabajo de tesis de Carlos César Peña,

para optar al grado de Doctor en Matemáticas

Dirección de tesis: Dra. Susana Elena Trione

Universidad de Buenos Aires

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemáticas

1995

Quiero expresar mi agradecimiento a la Dra. Susana Elena Trione, que accedió a dirigir mis estudios como alumno de la Carrera de Doctorado de la Universidad de Buenos Aires; desde el año 1989, en el que cursé la materia de Post - Grado que dictara bajo el nombre de "Transformaciones Integrales de Funciones Generalizadas", hasta el presente, he sido honrado por su amistad, su humanidad, su respeto y su asistencia profesional.

Agradezco también a todos aquellos, profesores, compañeros de estudio y en general, al personal de la Universidad, con quienes he compartido amistad y aprendizaje durante los años en los que trabajé y me formé en la FCEyN de la Universidad de Buenos Aires.

Carlos Peña

Buenos Aires, agosto de 1995

Indice

Introducción

El trabajo que presento tiene dos partes bien diferenciadas, por lo cual he optado por dividirlo no en capítulos sino en partes (Parte I y Parte II), más un Anexo en el que esbozo, siguiendo a B. Ross [R1], M. Gaer & L. Rubel [G & R], algunos aspectos históricos del desarrollo del Cálculo Fraccionario.

En la Parte I considero el tratamiento de un problema de B. Ross, seleccionado, entre otros, por Thomas J. Osler en la nota *"Open Questions for Research"*, bajo el No. 4, el cual consta en el *"Lecture Notes in Math., Fractional Calculus and Its Applications"*, Proccedings of the International Conference Held at the University of New Haven, junio 1974, pag. 376. Básicamente, el problema consiste en establecer teoremas que permitan evaluar o estimar la llamada desviación corriente, la cual se produce al efectuar una integración fraccionaria iterada con respecto a la ley de aditividad de índices; para ser más preciso, cuando me refiero a integración fraccionaria estoy hablando, específicamente, del llamado operador de Riemann - Liouville, esto es:

$$f = f(x) \xrightarrow{\ {}_aI^{-\alpha}\ } {}_aI_x^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - s)^{\alpha-1} f(s)\, ds.$$

Se supone que f es una función $\mathbb{C}$ - valuada, que a (la terminal o entrada inferior) es un número real y que α es un número complejo cuya parte real es positiva. Bajo condiciones bastante generales sobre f (p. ej., si f es localmente integrable), el operador anterior está correctamente definido.

Si, por otra parte, se da otro número complejo β cuya parte real es también positiva, formalmente se puede escribir:

$${}_aI_x^{-\alpha}\ {}_aI_x^{-\beta}\ f(x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - s)^{\alpha-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^s (s - t)^{\beta-1}\ f(t)\ dt \right] ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)} \int_a^x f(t)\ dt \left[\int_t^x (x - s)^{\alpha-1}\ (s - t)^{\beta-1}\ ds \right] dt.$$

Haciendo uso de la conocida fórmula de Euler:

$$\int_t^x (x - s)^{\alpha-1}\ (s - t)^{\beta-1}\ ds = Be(\alpha,\ \beta)\ (x - t)^{\alpha+\beta-1},$$

resulta válida la llamada ley de aditividad de índices:

$${}_aI_x^{-\alpha}\ {}_aI_x^{-\beta}\ f(x) = {}_aI_x^{-\alpha-\beta}\ f(x).$$

Si en una integración iterada las terminales inferiores son distintas, el problema de Ross consistirá en la determinación de la denominada desviación corriente:

$${}_{a,b}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta} = {}_{a,b}I^{\alpha,\beta} - {}_bI^{-\alpha-\beta},$$

donde se indica:

$${}_{a,b}I^{\alpha,\beta} = {}_bI^{-\beta} \circ {}_aI^{-\alpha}.$$

Hay razones de índole histórica, que motivan el estudio específico del problema de Ross referido a la transformada de Riemann -Liouville; estas razones están esbozadas en el Anexo. En particular, la transformada de Holmgren - Riesz:

$$f = f(x) \xrightarrow{{}_aH^{-\alpha}} {}_aH_x^{-\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + n)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x - s)^{\alpha+n-1}\ f(s)\ ds$$

en la cual f es una función $\mathbb{C}$ - valuada general (p. ej., localmente integrable), $\alpha \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ t.q. $\Re(\alpha + n) > 0$, está bien definida y generaliza, como puede verse por prolongación analítica, a la transformada de Riemann - Liouville. El problema de Ross, planteado para esta operación integral, requiere condiciones más restrictivas sobre f (debe haber un número suficiente de derivadas suaves); he efectuado el estudio correspondiente, el cual se halla en las Actas del 2do. Congreso Dr. A. R. Monteiro (Bahía Blanca, 1993, pags. 79 - 93) [P1].

En el análisis del problema de Ross hago uso de un teorema de I. Schur [Sc], con el objeto de estudiar operadores integrales generados mediante núcleos homogéneos; este teorema también se halla con el número 319 en las célebres *"Inequalities"* de G. Hardy, J. E. Littlewood y G. Pólya [H, L & P]. En este trabajo utilizo la versión (más general) del teorema de Schur (debida a G. Okikiolu [Ok]), a saber:

Teorema

Sean (X, Ξ, m_X), (Y, Υ, m_Y) espacios de medida σ - finita, p, r, μ_1 y μ_2 números reales t.q.:

$$1 \le p \le r, \qquad\qquad (\mu_1/p') + (\mu_2/r) = 1$$

y sea ψ una función $\Xi.\Upsilon$ medible. Se supone que hay funciones medibles no negativas ϕ_1 sobre X, ϕ_2 sobre Y y constantes no negativas M_1 y M_2 tales que

$$(i) \int_X [\phi_1(x)]^{p} |\psi(x, y)|^{\mu_1} dm_X(x) \le M_1^{p'} [\phi_2(y)]^{p'}, \ m_Y - \text{a.e. sobre } Y$$

$$(ii) \int_Y [\phi_2(y)]^{r} |\psi(x, y)|^{\mu_2} dm_Y(y) \le M_2^{r} [\phi_1(x)]^{r}, \ m_X - \text{a.e. sobre } X$$

Si el operador T está definido mediante:

$$T(f)(y) = \int_X f(x)\ \psi(x, y)\ dm_X(x) \qquad\qquad (y \in Y),$$

entonces $T\colon \mathbb{L}^p(X) \longrightarrow \mathbb{L}^r(Y)$ *y* $\| T(f) \|_r \leq M_1 \; M_2 \; \| f \|_p$.

En el §1 de la Parte I señalo, en líneas generales, la nomenclatura básica de la que haré uso; en particular introduzco las funciones $\mathfrak{F}_{\alpha,\beta}$ y $\mathfrak{B}_{\alpha,\beta}$ (v. [5], [6]) las que jugarán un importante rol durante el análisis; las propiedades y relaciones comunes de estas funciones se presentan en el §2, para luego dar, en el §3, Prop. [I.3.1], una representación integral del operador ${}_{r,s}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta}$ (v. [15]), realizándose el mismo en cuanto un operador inducido por un núcleo homogéneo, esto es, mediante el núcleo $\mathfrak{F}^{s}_{\alpha,\beta}$. La Prop. [I.3.2] permitirá después representar al operador ${}_{r,s}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta}$, salvo traslaciones, como un operador del mismo tipo, pero con la terminal superior nula. Dada la invariancia de la medida de Lebesgue respecto de movimientos rígidos, esta descomposición me exime del caso general, que será retomado en [I.3.18].

Mediante la Prop. [I.3.3] establezco la posibilidad de tratar al núcleo $\mathfrak{F}^{0}_{\alpha,\beta}$ según la versión general de Okikiolu del teorema de Schur antes señalada; se llega así al teorema [I.3.4] en el que el operador ${}_{r,s}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta}$ es presentado como un operador lineal acotado entre los espacios de Lebesgue $\mathbb{L}^p([r, s])$ y $\mathbb{L}^q([s, +\infty))$ en la medida que, haciendo $\mathfrak{r} = \mathfrak{R}(\alpha + \beta)$, resulte:

$$q^{-1} = p^{-1} - \mathfrak{r}, \quad 1 < q \leq +\infty, \quad 1 < p \qquad \text{o} \qquad p = 1,\ q - \text{finito}.$$

En particular, para el análisis del caso

$$p = 1, \quad 0 < \mathfrak{r} < 1, \quad 1 < q < +\infty, \quad q^{-1} = 1 - \mathfrak{r},$$

estudio espacios de medidas más generales; así, en el teorema [I.3.6] el operador ${}_{k,0}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta}$ (k – real negativo fijo) resulta ser un operador acotado entre los espacios c/ peso $\mathbb{L}^1([k,0], w_1)$ y $\mathbb{L}^q([0, +\infty), w_2)$, en la medida que $w_1(u)^q = \mathfrak{S}\{w_2;\ -u\}$ a.e. $u \in [k,0]$, donde $\mathfrak{S}\{w_2;\ -u\}$ es la transformada de Stieltjes de w_2 en $-u$ [E, M, O & T].

En [I.3.7] doy ejemplos específicos de pesos w_1, w_2 en las condiciones anteriores.

Con objeto de continuar la generación de familias de operadores a partir del operador de desviación corriente, en [I.3.8] contemplo los parámetros p, q, $\mathfrak{r}$ sujetos a la condición más general $1/q = |\mathfrak{r} - 1/p|$.

En particular, cuando $1/p < \mathfrak{r} < 1$ deduzco que ${}_{k,0}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta}$ (k - real negativo fijo) resulta ser un operador acotado entre los espacios con peso $\mathbb{L}^p([k,0],\ w_1)$ y $\mathbb{L}^q([0,\ +\infty),\ w_2)$, en la medida que:

(a) Están bien definidas, y son finitas, las constantes C_0, C_1 dadas por las relaciones

$$C_0 = \left(\int_k^0 w_1(u)^{-\frac{\mathfrak{r}}{1-\mathfrak{r}}} \frac{du}{|u|} \right)^{1-\mathfrak{r}}, \qquad C_1 = \int_k^0 |u|^{q/p'-1}\, w_1(u)\, du.$$

(b) Existe una constante $\mathfrak{z}$ tal que:

(b1) $-q/p' < \mathfrak{z}$;

(b2) $w_1(u) = |u|^{\mathfrak{z}} \left[\mathfrak{S}_{q/p'-1}\{w_2;\ -u\} \right]^{-1}$ a.e. $u \in [k,0]$;

i.e. $|u|^{\mathfrak{z}}/\ w_1(u)$ es una transformada de Stieltjes generalizada de w_2.

En [I.3.10] presento un ejemplo de un par de pesos en las anteriores condiciones. Considerando el caso $\mathfrak{r} = 1$, en [I.3.11] pruebo que el operador ${}_{k,0}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta}$ (k siempre real negativo fijo) resulta ser acotado entre los espacios $\mathbb{L}^p([k,0],\ w_1)$ y $\mathbb{L}^q([0,\ +\infty),\ w_2)$, $1 \le p,\ q \le \infty$, asumiendo que w_2 es absolutamente integrable sobre $\mathbb{R}^+$ y la existencia de una constante positiva ε t.q. $w_1(u) \ge \varepsilon$ a.e. $u \in [k,0]$.

El [I.3.12], en el que estudio el caso $\mathfrak{r} > 1$, es una extensión (para $1 \le p,\ q < \infty$), del caso anterior, manteniéndose la misma conclusión y la misma condición sobre w_1, pero en cuanto a w_2, asumiendo ahora que

$$\int_0^{+\infty} (v - k)^{q(\mathfrak{r}-1)} w_2(v)\, dv < +\infty.$$

Las condiciones que he requerido en [I.3.12] son suficientes pero no necesarias; este hecho está señalado en [I.3.14] y se dan ejemplos al respecto en [I.3.15]. Luego en [I.3.16] se establecen condiciones bajo las cuales ${}_{k,0}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta}$: $\mathbb{L}^p([k,0], |u|^\sigma) \longrightarrow \mathbb{L}^q([0, +\infty), v^\lambda)$ es contínuo. Este análisis lo realízo para α, $\beta \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1 \leq \alpha + \beta = \mathfrak{r}$.

En particular, en [I.3.17] se señala que necesariamente ha de ser $\alpha < 1$.

En [I.3.18] vuelvo a la consideración del caso general; enuncio entonces las condiciones técnicas, suficientes para generalizar los resultados hasta aquí expuestos.

El §4 está dedicado al estudio de los operadores adjuntos, de los derivados en §3, del operador de desviación corriente. Finalmente, en el §5 hago un análisis, no ya en la norma, sino puntual, del operador de desviación corriente, llegando así a la representación:

$${}_{r,s}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_r^s (t-u)^{\alpha+\beta-1} f(u)\, du -$$

$$- \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{\mathrm{Be}(\alpha,n)}\ {}_r\mathrm{I}_s^{-\alpha-n-1} \left[f(s) \frac{(t-s)^{\beta-n-1}}{\Gamma(\beta-n)} \right]$$

cualquiera sea $f \in \mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, donde la identidad es válida salvo algún subconjunto eventual de medida nula de $[s, +\infty)$; a partir de esta última fórmula, en [I.5.3] vemos que la serie involucrada es la medida exacta de la desviación $({}_r\mathrm{I}^{-\alpha-\beta} - {}_{r,s}\mathrm{I}^{\alpha,\beta}) f(t)$ a.e. $t \geq s$.

Con respecto a la Parte II, en la Prop. [II.1.1] es evaluada la antitransformada de Mellin de la función $\mathfrak{B}_{\alpha,\beta}$ (v. [5]); las características de esta antitransformada las estudié, en un marco distinto, en el primer trabajo que hice bajo la dirección de la Dra. Susana Elena Trione [P2]; introduzco así los que he llamado espacios $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}$, como espacios de funciones $f = f(t)$ de la variable positiva t con valores en $\mathbb{C}$, indefinidamente derivables, tales que cualesquiera sean los enteros no negativos k, h resulta:

$$|\log t|^h\ t^{k+\mathfrak{r}}\ |f^{(k)}(t)| \longrightarrow 0 \quad (t \longrightarrow 0+ \quad o \quad t \longrightarrow +\infty).$$

Estos espacios, con la estructura vectorial compleja natural, munidos de la familia de seminormas:

$$\gamma_{k,h}^{[\mathfrak{r}]}(f) = \sup_{t>0} |\log t|^h\ t^{k+\mathfrak{r}}\ |f^{(k)}(t)|,$$

devienen en espacios vectoriales topológicos, más aún, espacios de Fréchet. Las antitransformadas a las que aludimos antes permiten ver, en particular, la relación $\bigcap_{\mathfrak{r}>0} \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}} \neq \emptyset$.

El estudio de transformadas integrales ha motivado la construcción de espacios funcionales clásicos: el espacio de Schwarz $\mathcal{S}$ de funciones temperadas (sobre el que la transformada de Fourier es un homeomorfismo), los espacios $L_{a,b}$ (en estudios de la transformada de Laplace), los espacios $W_{a,b}$ (en estudios de la transformada de Weierstrass), los espacios $\mathfrak{X}_{\mu}$ (en estudios sobre la transformada de Hankel), etc..

En particular, con referencia al estudio de la transformada de Mellin, hay trabajos ya clásicos efectuados en los denominados espacios $M_{a,b}$, los cuales constan de funciones $\mathbb{C}$ - valuadas indefinidamente derivables $\theta = \theta(t)$ tales que para todo entero no negativo m resulta:

$$\xi_{a,b,m}(\theta) = \sup_{t>0} |\zeta_{a,b}(t)\, t^{m+1}\, \theta^{(m)}(t)| < +\infty$$

donde se ha escrito:

$$\zeta_{a,b}(t) = \begin{cases} t^{-a} & \text{si} \quad 0 < t \leq 1 \\ t^{-b} & \text{si} \quad 1 \leq t < +\infty \end{cases} .$$

Para una tal construcción, se puede consultar Fung Kang [FK], quien haciendo uso de métodos de Gelfand & Shilov ([G & S], VOL. 1, Cap. II) obtuviera una definición indirecta de la transformada de Mellin generalizada basada en una ecuación de Parseval, o bien Zemanian ([Z], Cap. IV). En particular, la aplicación:

$$\theta(t) \longrightarrow e^{-t}\,\theta(e^{-t})$$

establece un homeomorfismo entre los espacios $M_{a,b}$ y $L_{a,b}$(Zemanian [Z] Cap. III); asimismo, dado $r \in \mathbb{R}$, ciertamente resulta:

$$\mathfrak{M}_{1-r} \subseteq M_{r,r}$$

mas la inclusión anterior es estricta como puede verse, p. ej., con la aplicación $\theta(t) = t^{r-1}$ definida para $t > 0$; de la relación

$$\xi_{r,r,m}(\theta) = \gamma^{[1-r]}_{m,o}(\theta)$$

sigue que la topología de $\mathfrak{M}_{1-r}$ es más fina que la topología de $\mathfrak{M}_{1-r}$ relativa a $M_{r,r}$.

En §1 de la Parte II introduzco entonces los espacios $\mathfrak{M}_r$, caracterizo sus elementos y efectúo la construcción de algunos de ellos; luego, ya en el §2 de la Parte II analizo las estructuras algebraica y topológica de $\mathfrak{M}_r$; demuestro la densidad del espacio $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$ de funciones indefinidamente derivables, soportadas en subconjuntos compactos de la semirrecta positiva y defino un producto sobre $\mathfrak{M}_r$, con el cual este espacio deviene en un álgebra conmutativa no unitaria la cual es relacionada, mediante sendos homeomorfismos, con dos estructuras de álgebra alternativas sobre el espacio de Schwarz.

En el §3 estudio nuevas construcciones sobre $\mathfrak{M}_r$, básicamente mediante la construcción de subgrupos cíclicos, lo que permite, en la Prop. [II.3.6], la representación integral:

$$2^{-1/2}\ t^{(1-1/2\pi)\ \ln t} = \int_0^{+\infty} u^{\ln(t^2 u^{-2})-1}\, du \qquad (t > 0).$$

Más allá de este ejemplo específico, la construcción provee de un método general para generar este tipo de representaciones.

En el §4 estudio los espacios $\mathfrak{M}_r$ en comparación con los espacios de McBride; el auge en el estudio de estos últimos se debe, en gran medida, a la definición unificada sobre la función H - de Fox [M & S1], [K,S & M], [G, G & S] (v. [II.5.3]), propuesta por V. S. Kiryakova [K] en 1988. H. Glaeske & M. Saigo [G & S] analizaron el cálculo fraccionario de la función hipergeométrica gaussiana introducida por M. Saigo [Sa] sobre los espacios de McBride y, recientemente, R, K. Raina & M. Saigo [R & S] hicieron lo propio con operadores integrales que admiten por núcleo a la función H - de Fox.

Ya en §5, efectúo un análisis, desde el punto de vista del Cálculo Fraccionario, sobre los espacios $\mathfrak{M}_r$. Cabe aclarar que el estudio que realizo sobre operadores acotados entre espacios $\mathfrak{M}_r$ no es el más general posible pero, en su defecto, el método seguido permite la consideración de la mayoría de los operadores clásicos, esto es: operadores de Riemann - Liouville, de Weyl y de Erdélyi & Kober; operadores que admiten los siguientes núcleos: de Hankel, Titchmarsch, Meijer, Struve y de Stieltjes. Asimismo, el punto de vista adoptado entraña un método general al cual pueden reducirce casos no contemplados. Finalmente, en §6 estudio más detenidamente la restricción de homeomorfismos entre espacios de McBride a espacios $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}$; en particular, considero los operadores de W. Lamb & A. C. McBride [L & McB] y condiciones bajo las que la restricción de estos deviene en automorfismos de $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}$.

Parte I.

El problema de Bertram Ross.

§1 Sobre la notación.

Cuando nos referimos a subconjuntos medibles de $\mathbb{R}$, o a funciones medibles (en general, $\mathbb{C}$ - valuadas), siempre lo hacemos en el sentido de Lebesgue. Fijado un conjunto medible arbitrario identificamos, como es usual, aquellas funciones medibles definidas sobre él, que difieren eventualmente en algún subconjunto de medida nula.

Dados un subconjunto medible M de $\mathbb{R}$ y una función medible w definida sobre M y positiva salvo, quizás, en algún subconjunto de medida nula de M, escribimos:

$$[1]\quad \mathbb{L}^p(M,w) = \left\{ f: M \longrightarrow \mathbb{C} \ / \ f \text{ es medible, } \int_M |f(x)|^p \, w(x)\, dx < +\infty \right\}$$

donde $1 \leq p < +\infty$; asimismo, caracterizamos la clase $\mathbb{L}^\infty(M,w)$ de funciones w - esencialmente acotadas, como la formada por funciones medibles $g: M \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que, para alguna constante positiva r, la integral:

$$\int_{\{x \in M / |g(x)|>r\}} w(x)\, dx$$

es nula ; en particular, una tal constante r se denomina cota w - esencial e indicamos $\| g \|_{\mathbb{L}^\infty(M,w)}$ al ínfimo de las cotas w - esenciales de g.

Asimismo, dada $f \in \mathbb{L}^p(M,w)$, p - finito, hacemos:

$$[2]\quad \| f \|_{\mathbb{L}^p(M,w)} = \left(\int_M |f(x)|^p \, w(x)\, dx \right)^{1/p}.$$

Cuando $w \equiv 1$ se obtienen los espacios de Lebesgue usuales y escribimos simplemente $\mathbb{L}^p(M,1) \equiv \mathbb{L}^p(M)$.

Dados sendos números complejos α, β con partes reales positivas, escribiremos:

[3] $$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, \quad \beta = \beta_1 + i\beta_2$$

y también

[4] $$T = \left\{ (r,s,t) \in \mathbb{R}^3 : \ r \leq s \leq t, \ r < t \right\}.$$

En particular, van a tener especial relevancia en nuestro análisis las funciones dadas mediante:

[5] $$\left| \begin{array}{l} \mathfrak{I}_{\alpha,\beta} : T \longrightarrow \mathbb{C} \\ \mathfrak{I}_{\alpha,\beta}(r,s,t) = \displaystyle\int_s^t (x - r)^{\alpha-1} (t - x)^{\beta-1} \, dx, \end{array} \right.$$

[6] $$\left| \begin{array}{l} \mathfrak{B}_{\alpha,\beta} : \mathbb{R}_o^+ \longrightarrow \mathbb{C} \\ \mathfrak{B}_{\alpha,\beta}(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} s^{\alpha-1} (1 + s)^{-\alpha-\beta} \, ds, \end{array} \right.$$

donde $\mathbb{R}_o^+$ es el conjunto de todos los números reales no negativos.

Fijado un número real s, definimos tambien:

[7] $$T^s = \left\{ (r,t) \in \mathbb{R}^2 : (r,s,t) \in T \right\}$$

e indicamos:

[8] $$\left| \begin{array}{l} \mathfrak{I}^s_{\alpha,\beta} : T^s \longrightarrow \mathbb{C} \\ \mathfrak{I}^s_{\alpha,\beta}(r,t) = \displaystyle\int_s^t (x - r)^{\alpha-1} (t - x)^{\beta-1} \, dx. \end{array} \right.$$

Como señalamos en la parte introductoria, fijado un número real a escribimos también:

[9] $${}_aI_x^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - s)^{\alpha-1} f(s) \, ds$$

donde $f \in \mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$ con valores en $\mathbb{C}$, quedando definida entonces:

[10] $$x \longrightarrow {}_aI_x^{-\alpha} f(x) \qquad (x \geq a).$$

Queda establecida entonces una correspondencia:

[11] $$\mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\ {}_aI^{-\alpha}\ } \mathbb{L}^1_{loc}([a,+\infty)).$$

En efecto si $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, dado un número $A > a$ tenemos:

$$\int_a^A \left| \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds \right| dx \le \int_a^A \left[\int_a^x (x-s)^{\alpha_1-1} |f(s)|\, ds \right] dx$$

$$= \int_a^A |f(s)| \left[\int_s^A (x-s)^{\alpha_1-1} dx \right] ds$$

$$= \frac{1}{\alpha_1} \int_a^A (A-s)^{\alpha_1} |f(s)|\, ds$$

[12] $$\le \frac{(A-a)^{\alpha_1}}{\alpha_1} \int_a^A |f(s)|\, ds < +\infty$$

con lo cual la aplicación dada en [10] es finita a.e. y localmente integrable sobre la semirrecta $[a, +\infty)$. Dados, entonces, dos números reales a, b tales que $a < b$ indicaremos:

[13] $${}_{a,b}I^{\alpha,\beta} = {}_bI^{-\beta} \circ {}_aI^{-\alpha}$$

al operador iterado:

[14] $${}_{a,b}I^{\alpha,\beta} f(x) = {}_bI_x^{-\beta} \left({}_aI_x^{-\alpha} f(x) \right).$$

Finalmente, denotaremos tambien:

[15] $${}_{a,b}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta} = {}_{a,b}I^{\alpha,\beta} - {}_bI^{-\alpha-\beta},$$

i.e. el operador ${}_{a,b}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta}$ permitira evaluar una medida de la desviación que se produce al efectuar una integración fraccionaria iterada, respecto de la ley corriente de índices, expresada mediante la relación:

[16] $${}_{a,a}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta} \equiv 0$$

cualquiera sea el número real a.

§2 Sobre las aplicaciones $\mathfrak{J}_{\alpha,\beta}$ y $\mathfrak{B}_{\alpha,\beta}$.

Proposición [I.2.1]

La aplicación $\mathfrak{B}_{\alpha,\beta}$ está bien definida para valores positivos, aún en el caso que solo la parte real de β sea positiva.

Demostración:

Sean $x \in \mathbb{R}^+$, α, β números complejos con $\Re(\beta) > 0$; podemos escribir:

[17] $$\int_x^{+\infty} \left| s^{\alpha-1} (1+s)^{-\alpha-\beta} \right| ds = \int_x^{+\infty} s^{\alpha_1-1} (1+s)^{-\alpha_1-\beta_1} ds,$$

donde estamos expresando α, β con la escritura introducida en [9].

Si $\alpha_1 > 0$ tenemos:

[18] $$\int_x^{+\infty} s^{\alpha_1-1} (1+s)^{-\alpha_1-\beta_1} ds = \int_0^{(1+x)^{-1}} (1-t)^{\alpha_1-1} t^{-\alpha_1-\beta_1} dt$$
$$\leq Be(\alpha_1, \beta_1) < +\infty.$$

Si $\alpha_1 = 0$, en [17] resulta:

[19] $$\int_x^{+\infty} \left| s^{\alpha-1} (1+s)^{-\alpha-\beta} \right| ds = \int_x^{+\infty} s^{-1} (1+s)^{-\beta_1} ds$$
$$\leq \int_x^{+\infty} s^{-1-\beta_1} ds < +\infty.$$

Consideremos $\alpha_1 < 0$. Si $-\alpha_1 - \beta_1 \leq 0$ es inmediato que las integrales en [17] son convergentes; supongamos $-\alpha_1 - \beta_1 > 0$.

$$\int_{MAX(1,x)}^{+\infty} s^{\alpha_1-1} (1+s)^{-\alpha_1-\beta_1} ds \leq 2^{-\alpha_1-\beta_1} \int_{MAX(1,x)}^{+\infty} s^{-1-\beta_1} ds < +\infty$$

de donde sigue la convergencia de [17] ∎

Proposición [I.2.2]

Dado $x \in \mathbb{R}^+$, se verifica la identidad:

$$\mathfrak{B}_{\alpha,\beta}(x) = \beta^{-1} (1 + x)^{-\beta} \; {}_2F_1(1 - \alpha, \beta, 1 + \beta, (1 + x)^{-1})$$

donde ${}_2F_1(a, b, c, z)$ es la serie hipergeométrica de Gauss usual.

Demostración:

Escribimos:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} \mathfrak{B}_{\alpha,\beta}(x) &= x^{\alpha-1} (1 + x)^{-\alpha-\beta} \\ &= (1 + x)^{-1-\beta} \left[\frac{x}{1 + x} \right]^{\alpha-1} \\ &= (1 + x)^{-1-\beta} \left[1 - \frac{1}{1 + x} \right]^{\alpha-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\alpha - 1}{n} (1 + x)^{-1-n-\beta} \qquad [20] \end{aligned}$$

donde, como es usual, si μ, ν son números complejos escribimos:

$$\binom{\mu}{\nu} = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu - \nu + 1)\, \Gamma(\nu + 1)}$$

cada vez que $\Re(\mu)$, $\Re(\nu)$, $\Re(\mu - \nu)$ no son enteros negativos.

Dados $N \in \mathbb{N}$ e $y \in \mathbb{R}$ tal que $y > x$ resulta:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \binom{\alpha - 1}{n} (1 + y)^{-1-n-\beta} \right| &\le \\ &\le \sum_{n=0}^{N} \left| \binom{\alpha - 1}{n} \right| (1 + y)^{-1-n-\beta_1} \\ &\le (1 + y)^{-1-\beta_1}\, c(y) \qquad [21] \end{aligned}$$

donde:

$$c(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \binom{\alpha - 1}{n} \right| (1 + y)^{-n} \qquad (y \in \mathbb{R} \text{ positivo}). \qquad [22]$$

La serie anterior converge absolutamente.

Como $y \longrightarrow (1+y)^{-1-\beta_1}\, c(y)$ es una función absolutamente integrable sobre el semieje $(x, +\infty)$, hacemos uso del teorema de convergencia dominada de Lebesgue y escribimos:

$$\mathfrak{B}_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\alpha-1}{n} \frac{1}{-n-\beta} (1+x)^{-n-\beta} \Big|_x^{+\infty}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\alpha-1}{n} \frac{1}{n+\beta} (1+x)^{-n-\beta}$$

[29] $$= \beta^{-1} (1+x)^{-\beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\alpha)_n\, (\beta)_n}{(1+\beta)_n} \frac{(1+x)^n}{n!}$$

donde, como es usual, escribimos $(a)_\nu = \Gamma(a+\nu)/\Gamma(a)$ cuando a, ν son números complejos tales que $\Re(a)$ y $\Re(a+\nu)$ no son enteros negativos.

Ahora, a partir de [29] sigue la proposición ∎

<u>Proposición [I.2.3]</u>

Dados números complejos α, β con partes reales positivas y un real x no negativo se tiene:

a) $\mathfrak{B}_{\alpha,\beta}(x) = Be(\alpha,\beta) - B_{\frac{x}{1+x}}(\alpha,\beta)$

donde $B_*(\alpha,\beta)$ es la función beta incompleta usual.

b) $\mathfrak{B}_{\alpha,\beta}(x) + \mathfrak{B}_{\beta,\alpha}(x^{-1}) = Be(\alpha,\beta)$

<u>Demostración:</u>

a) Sigue de la proposición anterior, o bien haciendo el cambio de variable: $s = t\,(1-t)^{-1}$ en [6].

b) $$\mathfrak{B}_{\alpha,\beta}(x) = \int_x^{+\infty} s^{\alpha-1} (1+s)^{-\alpha-\beta}\, ds$$

$$= \int_0^{x^{-1}} t^{\beta-1} (1+t)^{-\alpha-\beta}\, dt$$

$$= \mathrm{Be}(\alpha,\beta) - \int_{x^{-1}}^{+\infty} t^{\beta-1} (1 + t)^{-\alpha-\beta}\, dt$$

$$= \mathrm{Be}(\alpha,\beta) - \mathfrak{B}_{\beta,\alpha}(x^{-1}) \quad \blacksquare$$

Proposición [I.2.4]

Dados una terna $(r,s,t) \in T$ y un número positivo p se verifican las siguientes identidades:

a) $\mathfrak{J}_{\alpha,\beta}(r,s,t) = (t - r)^{\alpha+\beta-1}\, \mathfrak{B}_{\alpha,\beta}\left(\dfrac{s - r}{t - s}\right)$.

b) $\mathfrak{J}_{\alpha,\beta}(pr,ps,pt) = p^{\alpha+\beta-1}\, \mathfrak{J}_{\alpha,\beta}(r,s,t)$.

c) $\mathfrak{J}_{\alpha,\beta}(r,s,t) = \mathfrak{J}^{\circ}_{\alpha,\beta}(r - s,\ t - s)$.

En particular, cabe descatar el carácter homogéneo de la aplicación $\mathfrak{J}_{\alpha,\beta}$ dado mediante el punto b).

Demostración:

a) Sigue enseguida al hacer $x = (r + ty)/(1 + y)$ en [5].

b), c) siguen enseguida mediante sencillos cambios de variables.

§3 Sobre operadores integrales iterados.

Proposición [I.3.1]

Sean α, $\beta \in \mathbb{C}$ con partes reales positivas, $f = f(u)$ una función $\mathbb{C}$ - valuada localmente integrable y r, $s \in \mathbb{R}$, $r \le s$. Entonces, para $t \ge s$, salvo quizás algún subconjunto de medida nula, es válida la identidad

$${}_{r,\bullet}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_r^{\bullet} f(u)\, \mathfrak{J}^{\bullet}_{\alpha,\beta}(u,t)\, du.$$

Demostración:

Como en [9], indicaremos $\Re(\alpha) = \alpha_1$, $\Re(\beta) = \beta_1$.

Sea $f \in \mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$; entonces:

$$ {}_{r,s}I^{\alpha,\beta} f(t) = {}_{s}I_{t}^{-\beta} \left[{}_{r}I_{t}^{-\alpha} f(t) \right] $$

$$ = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{s}^{t} (t - v)^{\beta-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{r}^{v} (v - u)^{\alpha-1} f(u)\, du \right] dv $$

[24]
$$ = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\, \Gamma(\beta)} \iint_{\mathfrak{L}} (v - u)^{\alpha-1} (t - v)^{\beta-1} f(u)\, d(u\times v), $$

donde:

[25]
$$ \mathfrak{L} = [r,s] \times [s,t] \cup \left\{ (u,v)^{2} \in \mathbb{R}: s \le u \le v \le t \right\}. $$

Por el teorema de Tonelli podemos escribir:

$$ \iint_{\mathfrak{L}} |(v - u)^{\alpha-1} (t - v)^{\beta-1} f(u)|\, d(u\times v) = $$

$$ = \int_{r}^{s} |f(u)|\, du \int_{s}^{t} |\, (v - u)^{\alpha-1} (t - v)^{\beta-1} \,|\, dv + $$

$$ + \int_{s}^{t} |f(u)|\, du \int_{u}^{t} |\, (v - u)^{\alpha-1} (t - v)^{\beta-1} \,|\, dv $$

$$ \le \int_{r}^{s} |f(u)|\, \mathfrak{F}_{\alpha_1,\beta_1}(u,s,t)\, du + \int_{s}^{t} |f(u)|\, \mathfrak{F}_{\alpha_1,\beta_1}(u,u,t)\, du $$

[por [I. 2. 4](a)

$$ = \int_{r}^{s} |f(u)|\, (t - u)^{\alpha_1+\beta_1-1}\, \mathfrak{B}_{\alpha_1,\beta_1}\left(\frac{s - u}{t - s} \right) du + $$

$$ + \mathrm{Be}(\alpha_1,\beta_1) \int_{s}^{t} |f(u)|\, (t - u)^{\alpha_1+\beta_1-1}\, du $$

[26] $$\leq \mathrm{Be}(\alpha_1,\beta_1) \int_r^t |f(u)| \; (t-u)^{\alpha_1+\beta_1-1} \, du.$$

Con el mismo razonamiento usado en [12], de [26] resulta:

[27] $$\iint_{\mathfrak{L}} |(v-u)^{\alpha-1} \; (t-v)^{\beta-1} \; f(u)| \; d(u\times v) < +\infty \quad \text{a.e. } t \geq s.$$

Aplicamos entonces el teorema de Fubini en [24] resultando:

$$_{r,s}I^{\alpha,\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_r^s f(u) \left[\int_s^t (v-u)^{\alpha-1} \; (t-v)^{\beta-1} dv \right] du \; +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_s^t f(u) \left[\int_u^t (v-u)^{\alpha-1} \; (t-v)^{\beta-1} dv \right] du$$

[28] $$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_r^s f(u) \; \mathfrak{F}_{\alpha,\beta} \, (u,s,t) \, du + {}_sI_t^{-\alpha-\beta} f(t)$$

y la tesis sigue de [15] y la relación anterior ∎

Proposición [I.3.2]

Dadas una función $\mathbb{C}$ - valuada definida sobre $\mathbb{R}$ y una constante real c indicaremos $\tau_c(f)$ a la función:

$$\left| \begin{array}{ll} \tau_c(f) \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} & \\ \tau_c(f)(v) = f(v+c) & \qquad (v - \text{real}) \end{array} \right.$$

Entonces, en las condiciones de [I.3.1] se verifica:

$$_{r,s}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta} = \tau_{-s} \circ \left({}_{r-s,0}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta} \right) \circ \tau_s .$$

Demostración:

Dada $f \in \mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, excepto un eventual subconjunto de medida nula (que depende de f) de la semirrecta $[s, +\infty)$ tenemos

$$_{r,s}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_r^s f(u) \; \mathfrak{F}^s_{\alpha,\beta} \, (u,t) \, du$$

(por [I.2.4](c)

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)} \int_r^s f(u)\ \mathfrak{F}^o_{\alpha,\beta}\ (u - s,\ t - s)\ du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)} \int_{r-s}^o f(s + v)\ \mathfrak{F}^o_{\alpha,\beta}\ (v,\ t - s)\ dv$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)} \int_{r-s}^o \tau_s(f)(v)\ \mathfrak{F}^o_{\alpha,\beta}\ (v,\ t - s)\ dv$$

$$= {}_{r-s,o}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta}\ \tau_s(f)(t - s)$$

$$= \tau_{-s}(\ {}_{r-s,o}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta}\ (\tau_s(f)))(t)$$

de donde sigue la afirmación ∎

<u>Proposición [I.3.3]</u>

Sean α, β como en la proposición anterior; escribiremos:

[29]
$$\begin{cases} \mathfrak{r} = \Re(\alpha + \beta) = \alpha_1 + \beta_1\ , \quad \Re(\alpha) = \alpha_1,\ \Re(\beta) = \beta_1 \\ \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \mathfrak{r}, \qquad 1 < q \leq +\infty, \quad 1 < p \\ \qquad\qquad\qquad\qquad p = 1,\ q_o - \text{finito}. \end{cases}$$

Como es usual, definimos p' a partir de la relación $1/p + 1/p' = 1$.

Si q es finito y $1 < p$, sea s un número real tal que:

[30]
$$\text{MAX}\left\{ -1,\ - \frac{p'}{q} \right\} < s < 0.$$

Definimos en tal caso:

[31]
$$\mathfrak{m}(u) = |u|^{s/p'} \qquad (u - \text{real}).$$

Dado un número negativo k hay constantes positivas C_1, C_2 independientes de k tales que

a) $\left[\displaystyle\int_k^o \mathfrak{m}(u)^{p'}\ |\ \mathfrak{F}^o_{\alpha,\beta}(u,v)|^{\frac{1}{1-\mathfrak{r}}}\ du \right]^{1/p'} \leq C_1\ \mathfrak{m}(v)$ para $v > 0$;

b) $$\left[\int_0^{+\infty} m(v)^q \, \left| \mathfrak{F}^o_{\alpha,\beta}(u,v) \right|^{\frac{1}{1-r}} dv \right]^{1/q} \leq C_2 \, m(u) \quad \text{para } u < 0.$$

mientras que, para $q = \infty$, existe una constante positiva C_3 independiente de k tal que:

c) $$\left[\int_k^0 \left| \mathfrak{F}^o_{\alpha,\beta}(u,v) \right|^{\frac{1}{1-r}} du \right]^{1/p'} \leq C_3 \quad \text{cuando } v > 0.$$

<u>**Demostración:**</u>

Para $v > 0$ tenemos

$$\int_k^0 m(u)^{p'} \left| \mathfrak{F}^o_{\alpha,\beta}(u,v) \right|^{\frac{1}{1-r}} du =$$

$$= \int_k^0 |u|^{s-1} \left| \mathfrak{F}^o_{\alpha,\beta}\left(-1, \frac{v}{u} \right) \right|^{\frac{1}{1-r}} du$$

$$= v^s \int_{v|k|^{-1}}^{+\infty} \left| \mathfrak{F}^o_{\alpha,\beta}(-1,w) \right|^{\frac{1}{1-r}} \frac{dw}{w^{s+1}}$$

(por [I. 2. 4](a))

$$= v^s \int_{v|k|^{-1}}^{+\infty} \left| (1+w)^{\alpha+\beta-1} \, \mathfrak{B}_{\alpha,\beta}(w^{-1}) \right|^{\frac{1}{1-r}} \frac{dw}{w^{s+1}}$$

$$= v^s \int_{v|k|^{-1}}^{+\infty} \frac{\left| \mathfrak{B}_{\alpha,\beta}(w^{-1}) \right|^{\frac{1}{1-r}}}{1+w} \frac{dw}{w^{s+1}}$$

[32]

$$\leq v^s \left[Be(\alpha_1, \beta_1) \right]^{\frac{1}{1-r}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+w} \frac{dw}{w^{s+1}}.$$

Por otra parte, para $u < 0$ resulta:

$$\int_0^{+\infty} m(v)^q \, \left| \mathfrak{F}^0_{\alpha,\beta}(u,v) \right|^{\frac{1}{1-r}} dv =$$

$$= \int_0^{+\infty} v^{\frac{sq}{p'}-1} \left| \mathfrak{F}^0_{\alpha,\beta}\left(\frac{u}{v},1\right) \right|^{\frac{1}{1-r}} dv$$

$$= |u|^{\frac{sq}{p'}} \int_{-\infty}^{0} \left| \mathfrak{F}^0_{\alpha,\beta}(w,1) \right|^{\frac{1}{1-r}} |w|^{-\frac{sq}{p'}-1} dw$$

(por [I. 2. 4](a))

$$= |u|^{\frac{sq}{p'}} \int_{-\infty}^{0} \left| (1-w)^{\alpha+\beta-1} \, \mathfrak{B}_{\alpha,\beta}(-w) \right|^{\frac{1}{1-r}} |w|^{-\frac{sq}{p'}-1} dw$$

$$\leq |u|^{\frac{sq}{p'}} \left[Be(\alpha_1,\beta_1) \right]^{\frac{1}{1-r}} \int_{-\infty}^{0} (1-w)^{-1} |w|^{-\frac{sq}{p'}-1} dw$$

[33] $$= |u|^{\frac{sq}{p'}} \left[Be(\alpha_1,\beta_1) \right]^{\frac{1}{1-r}} \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+w} \, w^{-\frac{sq}{p'}-1} dw.$$

Indicaremos:

[34] $$\mathfrak{G}(\sigma) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+w} \, w^{\sigma} \, dw \qquad (\sigma \in \mathbb{C},\ -1 < \Re(\sigma) < 0).$$

Notemos que $\mathfrak{G}$ está bien definida pues dado $\varepsilon > 0$ tenemos:

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{1+w} \, w^{\Re(\sigma)} dw \leq \int_0^{\varepsilon} w^{\Re(\sigma)} dw < +\infty \qquad \text{pues} \quad -1 < \Re(\sigma).$$

Por otro lado, dada una constante positiva M escribimos:

$$\int_M^{+\infty} \frac{1}{1+w} \, w^{\Re(\sigma)} dw \leq \int_M^{+\infty} w^{\Re(\sigma)-1} dw < +\infty \qquad \text{pues} \quad \Re(\sigma) < 0.$$

Con las condiciones impuestas a s por [30] los exponentes de w en [32] y [33] están en el intervalo (−1,0); en particular, quedan definidas las constantes C_1 y C_2 y siguen a) y b).

Consideremos el caso $q = \infty$, i.e. $\mathfrak{r} = 1/p$. Dado $v > 0$, escribimos:

$$\left[\int_k^0 \left| \mathfrak{F}^0_{\alpha,\beta}(u,v) \right|^{\frac{1}{1-\mathfrak{r}}} du \right]^{1/p'} = \left[\int_k^0 \left| \mathfrak{F}^0_{\alpha,\beta}(u,v) \right|^{p'} du \right]^{1/p'}$$

$$= \left[\int_k^0 \left| \int_0^v (w-u)^{\alpha-1} (v-w)^{\beta-1} \, dw \right|^{p'} du \right]^{1/p'}$$

(por la desigualdad de Minkowski)

$$\leq \int_0^v (v-w)^{\beta_1-1} \left[\int_k^0 (w-u)^{(\alpha_1-1)p'} du \right]^{1/p'} dw$$

(notar que $(\alpha\ -1)p'+1$ es negativo)

$$= \int_0^v (v-w)^{\beta_1-1} \left[\frac{(w-k)^{(\alpha_1-1)p'+1} - w^{(\alpha_1-1)p'+1}}{(\alpha_1-1)\,p'+1} \right]^{1/p'} dw$$

$$\leq [(1-\alpha_1)\,p' - 1]^{-1/p'} \int_0^v (v-w)^{\beta_1-1} \, w^{(\alpha_1+1/p')-1} \, dw$$

$$= \frac{Be(\alpha_1 + 1/p', \beta_1)}{[(1-\alpha_1)\,p' - 1]^{1/p'}} \, v^{(\mathfrak{r}+1/p')-1}$$

$$[95] \qquad = \frac{Be(\alpha_1 + 1/p', \beta_1)}{[(1-\alpha_1)\,p' - 1]^{1/p'}},$$

lo que da la constante C_3 enunciada. ∎

Teorema [I.3.4]

Conservando la notación precedente, el operador ${}_{r,s}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta}$ es acotado, en cuanto operador lineal entre los espacios $\mathbb{L}^p([r,s])$ y $\mathbb{L}^q([s,+\infty))$.

Demostración:

El carácter lineal de ${}_{r,s}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta}$ es inmediato.

Si suponemos válido el resultado para operadores del tipo ${}_{k,o}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta}$, donde k es un número real negativo, de [I.3.2] sigue enseguida el caso general. Fijado entonces un valor negativo k se probará que ${}_{k,o}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta}$ es un operador acotado entre los espacios $\mathbb{L}^p([k,0])$ y $\mathbb{L}^q([0,\infty))$.

Si $q = \infty$, $p > 1$ y tenemos $\mathfrak{r} = 1/p$; dados $f \in \mathbb{L}^p([k,0])$ y un número v positivo podemos hacer:

$$\left|{}_{k,o}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta} f(v)\right| =$$

(por [I. 3. 1])

$$= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)} \int_k^o f(u)\ \mathfrak{F}^o_{\alpha,\beta}\ (u,v)\ du \right|$$

(por la desigualdad de Cauchy-Schvartz)

$$\leq \frac{1}{|\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)|}\ ||f||_{\mathbb{L}^p([k,o])}\ ||\ \mathfrak{F}^o_{\alpha,\beta}\ (\ ,v)||_{\mathbb{L}^{p'}([k,o])}$$

[36] $$\leq \frac{C_3}{|\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)|}\ ||f||_{\mathbb{L}^p([k,o])}$$

de donde deducimos que ${}_{k,o}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta} f \in \mathbb{L}^{\infty}([0,+\infty))$ y, además,

[37] $$||{}_{k,o}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta} f||_{\mathbb{L}^{\infty}([o,+\infty))} \leq \frac{C_3}{|\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)|}\ ||f||_{\mathbb{L}^p([k,o])}.$$

Pasamos entonces al caso q - finito, $p > 1$. De [29] sigue la identidad:

[38] $$1/p' + 1/q + \mathfrak{r} = 1.$$

Sea ahora $g \in \mathbb{L}^p([k,0])$ y, como antes, v un número positivo. Ahora:

$$\left|\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)\ {}_{k,o}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta}\ g(v)\right| =$$

(por [I. 3. 1])

$$= \left| \int_k^o g(u)\ \mathfrak{F}^o_{\alpha,\beta}\ (u,v)\ du \right|$$

$$\leq \int_k^0 |g(u)\ \mathfrak{F}^0_{\alpha,\beta}(u,v)|\ du$$

(por la desigualdad de Hölder)

[39] $$\leq A.B.C$$

donde:

[40]
$$\left|\begin{array}{l} A = ||\ g\ ||_p^{pr}, \\[2ex] B = \left[\displaystyle\int_k^0 m(u)^{p'}\ |\mathfrak{F}^0_{\alpha,\beta}(u,v)|^{\frac{1}{1-r}}\ du\right]^{1/p'}, \\[2ex] C = \left[\displaystyle\int_k^0 m(u)^{-q}\ |g(u)|^p\ |\mathfrak{F}^0_{\alpha,\beta}(u,v)|^{\frac{1}{1-r}}\ du\right]^{1/q}. \end{array}\right.$$

Por [I.3.3](a), en [39] resulta:

[41] $$A.B.C \leq A.\ C.\ C_1\ m(v);$$

i.e. de [39] y [41], para $v > 0$ obtenemos:

$$|\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)\ {}_{k,o}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta}\ g(v)|^q \leq$$

[42] $$\leq (A.C_1)^q\ m(v)^q \int_k^0 m(u)^{-q}\ |g(u)|^p\ |\mathfrak{F}^0_{\alpha,\beta}(u,v)|^{\frac{1}{1-r}}\ du.$$

Escribimos entonces:

$$|\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)|^q \int_0^{+\infty} |{}_{k,o}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta}\ g(v)|^q\ dv \leq$$

$$\leq (A.C_1)^q \int_0^{+\infty} m(v)^q \left[\int_k^0 m(u)^{-q}\ |g(u)|^p\ |\mathfrak{F}^0_{\alpha,\beta}(u,v)|^{\frac{1}{1-r}}\ du\right] dv$$

$$= (A.C_1)^q \int_k^0 m(u)^{-q}\ |g(u)|^p \left[\int_k^0 m(v)^q\ |\mathfrak{F}^0_{\alpha,\beta}(u,v)|^{\frac{1}{1-r}}\ dv\right] du$$

(por [I. 3. 3](b))

$$\leq (A.C_1.C_2)^q \int_k^0 |g(u)|^p \, du$$

(por [40])

[43] $$= (C_1.C_2)^q \; || \; g \; ||_p^{p(r q+1)}$$

Vemos que ${}_{k,o}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta} \, g \in \mathbb{L}^q \, ([0,+\infty))$ y además:

[44] $$|| \; {}_{k,o}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta} \, g \; ||_q \leq \frac{C_1 . C_2}{|\Gamma(\alpha) \; \Gamma(\beta)|} \; || \; g \; ||_p .$$

Finalmente, en el caso p = 1, q = ∞, dados u − negativo, v − positivo, puesto que resulta $r = 1$ podemos hacer:

$$|\mathfrak{F}^o_{\alpha,\beta} \, (u,v)| = \left| \int_o^v (x-u)^{\alpha-1} \, (v-x)^{\beta-1} \, dx \right|$$

$$\leq \int_o^v (x-u)^{\alpha_1-1} \, (v-x)^{\beta_1-1} \, dx$$

$$\leq \int_u^v (x-u)^{\alpha_1-1} \, (v-x)^{\beta_1-1} \, dx$$

[45] $$= Be(\alpha_1, \, \beta_1).$$

Dada $h \in \mathbb{L}^1([k,0])$, por la relación anterior tenemos:

[46] $$\int_k^0 |h(u) \; \mathfrak{F}^o_{\alpha,\beta} \, (u,v)| \, du \leq Be(\alpha_1, \, \beta_1) \; || \; h \; ||_{\mathbb{L}^1([k,0])}$$

de modo que ${}_{k,o}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta} \, h$ está definido y:

[47] $$|| \; {}_{k,o}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta} \, h \; ||_{\mathbb{L}^\infty([0,+\infty))} \leq \frac{Be(\alpha_1, \, \beta_1)}{|\Gamma(\alpha) \; \Gamma(\beta)|} \; || \; h \; ||_{\mathbb{L}^1([k,0])}$$

de donde sigue finalmente la tesis. ∎

Nota [I.3.5]

Con la notación introducida en [29], vamos a analizar a continuación el caso $p = 1$, $0 < r < 1$, $1 < q < +\infty$, $1/q = 1 - r$. Completamos de esta manera el estudio realizado hasta ahora, en cuyo marco la situación presente se da con cierta excepcionalidad.

Teorema [I.3.6]

Sean w_1, w_2 dos pesos definidos sobre $[k,0]$ y el semieje $[0, +\infty)$, respectivamente.

Supondremos que w_1, w_2 verifican la relación:

$$w_1(u)^q = \mathfrak{S}\{w_2(v);\ v = -u\}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{w_2(v)}{v - u}\, dv \qquad \text{a.e. } u \in [k,0],$$

donde $\mathfrak{S}\{w_2(v);\ v = -u\}$ es la transformada de Stieltjes de w_2 en $-u$.

Entonces el operador

$${}_{k,o}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta} : \mathbb{L}^1([k,0],\ w_1) \longrightarrow \mathbb{L}^q([0,+\infty))$$

está bien definido, es acotado y si $f \in \mathbb{L}^1([k,0],\ w_1)$ se tiene:

$$\| {}_{k,o}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta} f \|_{\mathbb{L}^q([0,+\infty),w_2)} \le \frac{Be(\alpha_1,\beta_1)}{|\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)|} \| f \|_{\mathbb{L}^1([k,0]),\ w_1)}.$$

Demostración:

Sea $f \in \mathbb{L}^1([k,0],\ w_1)$; tenemos entonces:

$$\left[\int_0^{+\infty} | {}_{k,o}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta} f(v)|^q\, w_2(v)\, dv \right]^{1/q} =$$

$$= \left[\int_0^{+\infty} \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)} \int_k^0 \mathfrak{F}^0_{\alpha,\beta}(u,v)\, f(u)\, du \right|^q w_2(v)\, dv \right]^{1/q}$$

(Por la desigualdad de Minkowski)

$$\le \frac{1}{|\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)|} \int_k^0 |f(u)| \left[\int_0^{+\infty} |\mathfrak{F}^0_{\alpha,\beta}(u,v)|^q\, w_2(v)\, dv \right]^{1/q} du$$

(Por la hipótesis)

$$\le \frac{Be(\alpha_1,\beta_1)}{|\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)|}\; || f ||_{\mathbb{L}^1([k,0],w_1)} .$$

Puesto que $f \in \mathbb{L}^1([k,0],\, w_1)$ es arbitraria, sigue la tesis ∎

Nota [I.3.7]

Veamos, a continuación, algunos ejemplos de pesos en las condiciones de [I.3.6].

[48] Ejemplo.

Definimos:

$$w_2(v) = (v - k)^{-1} \qquad (v \ge 0).$$

Tenemos entonces:

$$\mathfrak{S}\{w_2(v);\ v = -u\} = \int_0^{+\infty} (v - k)^{-1}\,(v - u)^{-1}\,dv$$

$$= (u - k)^{-1} \log\,(k/u) \qquad (u \le 0).$$

Dado entonces $k \le u \le 0$ escribimos:

$$w_1(u) = \left[\frac{\log\,(k/u)}{u - k}\right]^{1/q}.$$

Evidentemente, w_2 es un peso; asimismo, w_1 también lo es ya que se trata de una función no negativa en $(k,0]$, con una discontinuidad evitable en $u = k$.

[49] Ejemplo.

Sea ahora:

$$w_2(v) = \frac{v}{k^2 + v^2} \qquad (v \ge 0).$$

Dado $u \le 0$ tenemos:

$$\mathfrak{S}\{w_2(v);\ v = -\,u\} = \frac{1}{k^2 + u^2}\left[\pi\,|k|/2 + u\,\log\,(u/k)\right].$$

Si $k \le u \le 0$ la expresión anterior está definida, es finita y no negativa (en particular, se puede definir $\mathfrak{S}\{w_2(v);\ v = 0\} = \pi\ |k|/2$, obteniéndose entonces una función contínua sobre $[k,0]$).

Bastará escribir entonces:

$$w_1(u) = \left\{ \frac{1}{k^2 + u^2} \left[\pi\ |k|/2 + u \log (u/k) \right] \right\}^{1/q},$$

[50] Ejemplo.

Consideramos:

$$w_2(v) = v^{-c}\ e^{kv} \qquad (v \ge 0),$$

donde $0 < c < 1$. Para u negativo, tenemos ahora:

$$\mathfrak{S}\{w_2(v);\ v = -u\} = \Gamma(1 - c)\ |u|^{-c}\ e^{ku}\ \Gamma(c,\ ku).$$

Como antes, definimos:

$$w_1(u) = [\Gamma(1 - c)\ |u|^{-c}\ e^{ku}\ \Gamma(c,\ ku)]^{1/q} \qquad (k \le u < 0)$$

y, en particular, hacemos, p. ej., $w_1(0) = \infty$. Así tanto w_1 como w_2 son pesos, y ambos estan en las condiciones de [I.3.6].

Nota [I.3.8]

Manteniendo siempre la nomenclatura antes introducida, escribiendo

[51] $$1/q = |r - 1/p|,$$

entonces, por las condiciones requeridas sobre los parámetros p, q, r se deduce que, necesariamente,

[52] $$0 < r \le 1 + 1/p$$

La consideración del caso $0 < r \le 1/p$ nos ha llevado al análisis efectuado en los teoremas [I.3.4] y [I.3.6]; a continuación, pasamos a desarrollar el estudio del caso $1/p < r < 1$.

Teorema [I.3.9]

Con la notación precedente, sean w_1, w_2 sendos pesos definidos sobre $[k,0]$, $[0,+\infty)$ respectivamente, tales que:

(a) Están bien definidas, y son finitas, las constantes C_0, C_1 dadas por las relaciones:

$$C_0 = \left[\int_k^0 w_1(u)^{-\frac{r}{1-r}} \frac{du}{|u|} \right]^{1-r}, \qquad C_1 = \int_k^0 |u|^{\frac{q}{p'}-1} w_1(u)\, du.$$

(b) Existe una constante $\mathfrak{z}$ tal que:

(b1) $-\dfrac{q}{p'} < \mathfrak{z}$.

(b2) $w_1(u) = |u|^{\mathfrak{z}} \left[\mathfrak{S}_{\frac{q}{p'}-1} \{w_2; -u\} \right]^{-1}$ a.e. $u \in [k,0]$.

i.e. $|u|^{\mathfrak{z}} / w_1(u)$ es una transformada de Stieltjes generalizada de w_2, esto es:

$$w_1(u) = |u|^{\mathfrak{z}} \left[\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{v-u} \right)^{\frac{q}{p'}-1} w_2(v)\, dv \right]^{-1} \quad \text{a.e. } u \in [k,0].$$

Entonces el operador ${}_{k,0}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta}$ está definido sobre $\mathbb{L}^p([k,0], w_1)$, y es acotado en cuanto operador lineal sobre $\mathbb{L}^q([0,+\infty), w_2)$.

<u>Demostración</u>:

Fijados un número positivo v y un número $u \in [k,0]$ se tiene:

[53] $$\left(1 - \frac{v}{u} \right)^{q(r-1)} \leq \left(\frac{|u|}{v} \right)^{\frac{q}{p'}-1}.$$

Parte de la hipótesis (a), de carácter técnico, junto con [53], garantiza la finitud de la integral

$$\int_k^0 \left(1 - \frac{v}{u} \right)^{q(r-1)} w_1(u)\, du.$$

Por otra parte, se tiene la relación:

[54] $$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + (1-r) = 1.$$

Dada entonces $f \in \mathbb{L}^p([k,0], w_1)$ tenemos:

$$\left| \int_k^0 \mathcal{J}^o_{\alpha,\beta}(u,v)\, f(u)\, du \right| \leq \int_k^0 \mathcal{J}^o_{\alpha_1,\beta_1}(u,v)\, |f(u)|\, du$$

(por [I. 2. 4](b))

$$= \int_k^0 |u|^{r-1}\, \mathcal{J}^o_{\alpha_1,\beta_1}\left(-1, -\frac{v}{u}\right) |f(u)|\, du$$

[55]

$$= \int_k^0 \frac{|u|^{r-1}}{w_1(u)}\, \mathcal{J}^o_{\alpha_1,\beta_1}\left(-1, -\frac{v}{u}\right) |f(u)|\, w_1(u)\, du$$

(por la desigualdad de Hölder y por la hipótesis (a))

$$\leq C_o\, \| f \|_{\mathbb{L}^p([k,o],w_1)} \left(\int_k^0 \left[\mathcal{J}^o_{\alpha_1,\beta_1}\left(-1, -\frac{v}{u}\right) \right]^q w_1(u)\, du \right)^{1/q}.$$

En particular:

$$\left(\int_k^0 \left[\mathcal{J}^o_{\alpha_1,\beta_1}\left(-1, -\frac{v}{u}\right) \right]^q w_1(u)\, du \right)^{1/q} \leq$$

(por [I. 2. 4](a)

$$\leq Be(\alpha_1,\beta_1) \left(\int_k^0 \left(1 - \frac{v}{u} \right)^{q(r-1)} w_1(u)\, du \right)^{1/q}$$

[56]

$$= Be(\alpha_1,\beta_1) \left(\int_k^0 \left(\frac{u}{u-v} \right)^{q/p'-1} w_1(u)\, du \right)^{\frac{1}{q}}.$$

En consecuencia, haciendo:

[57] $$C = C_o\, Be(\alpha_1,\beta_1)\, \| f \|_{\mathbb{L}^p([k,o],w_1)}$$

obtenemos:

$$\left[\int_0^{+\infty} \left| \int_k^0 \mathcal{J}^o_{\alpha,\beta}(u,v)\, f(u)\, du \right|^q w_2(v)\, dv \right]^{1/q} \leq$$

$$\le C \left[\int_0^{+\infty} \left[\int_k^0 \left(\frac{u}{u - v} \right)^{q/p'-1} w_1(u)\, du \right] w_2(v)\, dv \right]^{\frac{1}{q}}$$

$$= C \left[\int_k^0 |u|^{\frac{q}{p'}-1} w_1(u) \left[\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{v - u} \right)^{\frac{q}{p'}-1} w_2(v)\, dv \right] du \right]^{\frac{1}{q}}$$

(por la condición (b2))

$$= C \left[\int_k^0 |u|^{q/p'+\mathfrak{z}-1}\, du \right]^{1/q}$$

$$= C \left[|k|^{q/p'+\mathfrak{z}} \,/\, (q/p' + \mathfrak{z}) \right]^{1/q}$$

En definitiva, puesto que f es arbitraria, el operador ${}_{k,o}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta}$ resulta acotado entre los espacios $\mathbb{L}^p([k,0], w_1)$ y $\mathbb{L}^q([0, +\infty), w_2)$. ∎

Nota [I.3.10]

Presentamos ahora un ejemplo, que prueba la existencia de pesos w_1, w_2, en las condiciones exigidas en [I.3.9]. Siempre con la notación introducida antes, escribiremos:

[58] $$\rho = q/p' - 1.$$

Notemos, en particular, que ρ es un número positivo. Consideremos $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ tres números tales que:

[59] $$\left| \begin{array}{l} 0 < \mathfrak{a} < \rho, \\ 0 < \mathfrak{b}, \\ -\, q/p' < \mathfrak{z} < \mathfrak{a} - \rho. \end{array} \right.$$

Definimos entonces:

[60] $$w_2(v) = v^{\mathfrak{a}-1} (v - k)^{-\mathfrak{b}} \qquad (v > 0)$$

donde, como hasta ahora, k es un número negativo.

En particular, dado $x > 0$ resulta:

[б1] $$\mathfrak{S}_{\rho}\{w_2;\ x\} = \frac{Be(a,\ b - a + \rho)}{|k|^{b}}\ x^{a-\rho}\ {}_2F_1\left(a,\ b,\ b + \rho,\ 1 - \frac{x}{|k|}\right)$$

En concordancia con la condición (b2) del teorema anterior definimos w_1 mediante la relación:

[б2] $$w_1(u) = |u|^{\mathfrak{z}} \left[\ \mathfrak{S}_{\rho}\{w_2(v);\ v = -u\}\ \right]^{-1} \qquad (u \in [k,0]).$$

Notar que la función:

[б3] $${}_2F_1\left(a,\ b,\ b + \rho,\ 1 + \frac{u}{|k|}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a)_n\ (b)_n}{(b + \rho)_n}\ \frac{1}{n!}\left(1 + \frac{u}{|k|}\right)^{n}$$

es positiva sobre [k,0], por tratarse de una serie de términos positivos y, en particular,

$$\frac{(a)_0\ (b)_0}{(b + \rho)_0} = 1$$

de modo que w_1 está definida en todo punto.

Pasamos entonces a verificar la condición (a) de [I.3.9]; por [б2] podemos escribir:

$$w_1(u)^{-\frac{r}{1-r}} = \left(\ |u|^{-\mathfrak{z}} \left[\ \mathfrak{S}_{\rho}\{w_2;\ -u\}\ \right]\ \right)^{\frac{r}{1-r}}$$

(por [б3])

[б4] $$= M \left(\ |u|^{-\mathfrak{z}+a-\rho}\ {}_2F_1\left(a,\ b,\ b + \rho,\ 1 + \frac{u}{|k|}\right)\ \right)^{\frac{r}{1-r}}$$

donde se ha escrito

[б5] $$M = \left(\ \frac{Be(a,\ b - a + \rho)}{|k|^{b}}\ \right)^{\frac{r}{1-r}}.$$

Por otra parte dado $u \in [k,0]$ y haciendo uso de [б3] tenemos:

[б6] $${}_2F_1\left(a,\ b,\ b + \rho,\ 1 + \frac{u}{|k|}\right) \le \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a)_n\ (b)_n}{(b + \rho)_n}\ \frac{1}{n!}.$$

Podemos escribir:

$$n \left[\frac{\dfrac{(a)_n \, (b)_n}{(b+\rho)_n} \; \dfrac{1}{n!}}{\dfrac{(a)_{n+1} \, (b)_{n+1}}{(b+\rho)_{n+1}} \; \dfrac{1}{(n+1)!}} - 1 \right] =$$

$$= n \left[\frac{(b+\rho+n)\,(n+1)}{(a+n)\,(b+n)} - 1 \right]$$

[67]

$$= \frac{\rho + 1 - a + \dfrac{b+\rho-ab}{n}}{1 + \dfrac{a+b}{n} + \dfrac{ab}{n^2}} \xrightarrow[(n \longrightarrow +\infty)]{} \rho + 1 - a.$$

Puesto que, por [59], $\rho > a$, concluimos, por aplicación del criterio de Raabe, que la serie obtenida en [66] es convergente; escribiremos:

[68] $$N = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a)_n \, (b)_n}{(b+\rho)_n} \; \frac{1}{n!} \right)^{1-\frac{1}{r}} .$$

Tenemos ahora:

$$\int_k^0 w_1(u)^{-\frac{r}{1-r}} \, \frac{du}{|u|} =$$

(por [65])

$$= M \int_k^0 \left(|u|^{-z+a-\rho} \; {}_2F_1\!\left(a,\, b,\, b+\rho,\, 1 + \frac{u}{|k|} \right) \right)^{\frac{r}{1-r}} \frac{du}{|u|}$$

(por [66] y [68])

[69] $$\le M \, N \int_k^0 |u|^{-\frac{r}{1-r}(z-a+\rho)-1} \, du.$$

La integral anterior resulta finita pues $0 < r < 1$ y $\mathfrak{z} < \alpha - \rho$.

Por otra parte de [69] es inmediata la desigualdad:

[70] $$1 \le {}_2F_1\left(\alpha,\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{b} + \rho,\ 1 + \frac{u}{|k|} \right) \qquad (u \in [k,0])$$

y podemos hacer:

$$\int_k^0 |u|^{q/p'-1}\ w_1(u)\ du =$$

(por [62])

$$= \int_k^0 |u|^{q/p'+\mathfrak{z}-1} \left[\mathfrak{S}_\rho\{w_2;\ -u\} \right]^{-1} du$$

(por [61] y [70])

$$\le M^{-(1-r)/r} \int_k^0 |u|^{q/p'+\mathfrak{z}-\alpha+\rho-1}\ du.$$

Esta última integral es finita por [59].

<u>Proposición [I.3.11]</u>

Sean $r = 1$, w_1, w_2 pesos definidos sobre $[k,0]$, $[0, +\infty)$, respectivamente. Asumiremos que:

(a) Existe una constante positiva ε t.q.

$$w_1(u) \ge \varepsilon \qquad \text{a.e.} \quad u \in [k,0].$$

(b) $w_2 \in \mathbb{L}^1([0, +\infty))$.

Entonces, si $1 \le p,\ q \le \infty$, el operador ${}_{k,0}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta}$ es acotado entre los espacios $\mathbb{L}^p([k,0],\ w_1)$ y $\mathbb{L}^q([0,\ +\infty),\ w_2)$.

<u>Demostración:</u>

Consideremos las siguientes desigualdades:

[71] $$\|\cdot\|_{\mathbb{L}^1([k,0])} \le c(\varepsilon,\ p,\ k)\ \|\cdot\|_{\mathbb{L}^p([k,0],w_1)} \qquad (1 \le p \le \infty).$$

[72] $$\|\cdot\|_{\mathbb{L}^q([0,+\infty),w_2)} \le c(w_2)\ \|\cdot\|_{\mathbb{L}^\infty([0,+\infty))} \qquad (1 \le q \le \infty).$$

En efecto, dada $f \in \mathbb{L}^p([k,0], w_1)$ $(1 \le p < \infty)$, tenemos

$$\int_k^0 |f(x)|\,dx = \int_k^0 |f(x)|\, w_1(x)^{-1}\, w_1(x)\,dx$$

(Por la desigualdad de Cauchy - Schwarz)

$$\le \|f\|_{\mathbb{L}^p([k,0],w_1)} \left(\int_k^0 w_1(x)^{1-p'}\,dx \right)^{1/p'}$$

(Por la condición (a))

[73] $$\le \varepsilon^{-1/p}\, |k|^{1/p'}\, \|f\|_{\mathbb{L}^p([k,0],w_1)}.$$

En particular en el caso p = 1 en el razonamiento anterior, la primer desigualdad puede obviarse obteniéndose la segunda, si convenimos que $1/\infty = 0$.

Por otra parte, por la condición (a) resulta que

[74] $$\|\cdot\|_{\mathbb{L}^\infty([k,0],w_1)} \equiv \|\cdot\|_{\mathbb{L}^\infty([k,0])}$$

y razonando como en [73] sigue [71] para el caso $p = \infty$.

En cuanto a [72], para q finito y $f \in \mathbb{L}^\infty([0,\infty))$ tenemos:

$$\left(\int_0^{+\infty} |f(x)|^q\, w_2(x)\,dx \right)^{1/q} \le \|f\|_{\mathbb{L}^\infty([0,\infty))}\, \|w_2\|_{\mathbb{L}^1([0,+\infty))}.$$

Veamos [72] en el caso $q = \infty$. Sea $g \in \mathbb{L}^\infty([0,+\infty))$; dado entonces un número real λ tal que $\lambda > \|g\|_{\mathbb{L}^\infty([0,\infty))}$ se tiene:

[75] $$\int_{\{|g|>\lambda\}} w_2(x)\,dx = 0$$

pues el dominio de integración en [75] es un conjunto de medida nula.

Luego resulta $\|g\|_{\mathbb{L}^\infty([0,\infty),w_2)} \le \lambda$. Deducimos así que

$$\|g\|_{\mathbb{L}^\infty([0,\infty),w_2)} \le \|g\|_{\mathbb{L}^\infty([0,\infty))},$$

i.e. sigue [72] tomando $c(w_2) = 1$.

Dados ahora $1 \le p \le \infty$, una función $h \in \mathbb{L}^p([k,0], w_1)$, escribimos:

$$|| {}_{k,0}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta} h ||_{\mathbb{L}^\infty([0,+\infty))} \le \frac{Be(\alpha_1,\beta_1)}{|\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)|} \; || h ||_{\mathbb{L}^1([k,0])}$$

(Por [71])

$$\le \frac{Be(\alpha_1,\beta_1)}{|\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)|} \; || h ||_{\mathbb{L}^p([k,0],w_1)} \; c(\varepsilon,\ p,\ k)$$

y por [72] se deduce la tesis. ∎

Proposición [I.3.12]

Siempre con la notación que precede, sean ahora $r > 1$, w_1, w_2 pesos pesos definidos sobre $[k,\ 0]$ y $[0,\ +\infty)$ respectivamente. Asumiremos:

(a) la existencia de una constante positiva ε t.q.

$$w_1(u) \ge \varepsilon \qquad \text{a.e.} \quad u \in [k,0];$$

(b) que la integral

$$\Lambda(k) = \left(\int_0^{+\infty} (v-k)^{q(r-1)} \, w_2(v)\, dv \right)^{1/q} du$$

es finita.

Entonces, para $1 \le p,\ q < \infty$, el operador ${}_{k,0}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta}$ es acotado entre los espacios $\mathbb{L}^p([k,0],\ w_1)$ y $\mathbb{L}^q([0,\ +\infty),\ w_2)$.

Demostración:

La prueba de esta proposición es básicamente la misma que la dada en [I.3 11]; en efecto si $f \in \mathbb{L}^p([k,0],\ w_1)$, $1 \le p \le \infty$, dado $q \ge 1$ finito podemos escribir:

$$\left(\int_0^{+\infty} | {}_{k,0}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta} f(v) |^q \, w_2(v)\, dv \right)^{1/q} \le$$

(Por la desigualdad de Minkovski)

$$\le \frac{1}{|\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)|} \int_k^0 |f(u)| \left(\int_0^{+\infty} |\mathfrak{F}^0_{\alpha,\beta}(u,v)|^q \, w_2(v)\, dv \right)^{1/q} du$$

$$\leq \frac{Be(\alpha_1,\beta_1)}{|\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)|} \int_k^0 |f(u)| \left(\int_0^{+\infty} (v-u)^{q(\tau-1)}\, w_2(v)\, dv \right)^{1/q} du$$

(Por la hipótesis (b))

$$\leq \Lambda(k)\ \frac{Be(\alpha_1,\beta_1)}{|\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)|}\ \|\ f\ \|_{\mathbb{L}^1((k,0))}$$

(Por [71])

$$\leq \Lambda(k)\ \frac{Be(\alpha_1,\beta_1)}{|\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)|}\ \|\ f\ \|_{\mathbb{L}^p((k,0),w_1)}\ c(\varepsilon,\ p,\ k)$$

lo que da entonces la tesis. ∎

<u>Nota [I.3.13]</u>

Veamos que la afirmación anterior no es válida si $q = \infty$. Para ello, sean $w_1 \in \mathbb{L}^1([k,0])$ una función con una cota esencial inferior positiva y w_2 un peso sobre $[0, +\infty)$, con integral positiva sobre toda semirrecta. Notemos que:

$${}_{k,0}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta}\ 1\ (v) =$$

[76]
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\ \Gamma(\beta)} \left[(v + |k|)^{\alpha+\beta}\ \mathfrak{B}_{\alpha+1,\beta}(|k|/v) - Be(\alpha + 1,\beta)\ v^{\alpha+\beta} \right],$$

donde hemos representado por 1 a la función $1(u) = 1$ $(u \in [k,0])$.

Vamos a suponer que $\alpha,\ \beta \in (0,\ +\infty)$ y $\alpha + \beta > 1$.

Dado un número positivo t, es válida la desigualdad

[77]
$$(1 + t)^{\alpha+\beta}\ \mathfrak{B}_{\alpha+1,\beta}(t) \geq Be(\alpha + 1,\ \beta),$$

lo que permite ver que la función ${}_{k,0}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta}\ 1$ es no negativa.

Además tenemos:

[78]
$${}_{k,0}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta}\ 1\ (+\infty) = +\infty.$$

Por ello, dado $M > 0$, existe $K > 0$ tal que ${}_{k,0}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta}\ 1\ (v) \geq M$ cuando $v > K$, de modo que

[79] $$\int_{\{\, {}_{k,o}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta}\, 1 \,\geq\, M \,\}} w_2(v)\, dv \geq \int_K^{+\infty} w_2(v)\, dv.$$

Por la hipótesis hecha sobre w_2, de la desigualdad anterior, válida para $M > 0$ arbitrario, deducimos que ${}_{k,o}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta}\, 1 \notin \mathbb{L}^{\infty}([0, +\infty), w_2)$.

Nota [I.3.14]

En [I.3.12], las condiciones requeridas sobre los pesos son suficientes para garantizar la continuidad del operador ${}_{k,o}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta}$. En general estas condiciones no son necesarias. Si consideramos $p > 1$, hacemos $w_1(u) = |u|^{\lambda}$ con $0 < \lambda < p/p'$ ($u \in [k, 0]$), w_2 en las mismas condiciones de [I.3.12], entonces ${}_{k,o}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta}$ sigue siendo un operador acotado entre los espacios $\mathbb{L}^p([k,0], w_1)$ y $\mathbb{L}^q([0, +\infty), w_2)$ para $1 \leq q < \infty$.

Nota [I.3.15]

Vamos a considerar α, β ambos reales, positivos y $\alpha + \beta \geq 1$.

Notemos que el operador ${}_{k,o}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta}$ no está definido sobre el espacio $\mathbb{L}^p([k,0], |u|^{\lambda})$ si $\lambda \geq p/p'$.

[80] En efecto, dado $\xi > 0$ escribiremos $\lambda = p/p' + \xi$, $f(u) = |u|^{\tau}$ donde $u \in [k,0]$, $-\xi/p - 1 < \tau < -1$.

Entonces $f \in \mathbb{L}^p([k,0], |u|^{\lambda})$ y además para v positivo resulta:

$$\int_k^0 (v - u)^{\alpha+\beta-1}\, \mathfrak{B}_{\alpha,\beta}(|u|/v)\, |u|^{\tau}\, du \geq v^{\alpha+\beta-1}\, \mathfrak{B}_{\alpha,\beta}(|k|/v) \int_k^0 |u|^{\tau}\, du,$$

de modo que ${}_{k,o}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta} f \equiv \infty$.

[81] Si p es finito, $p \geq 2$, la función

$$g(u) = \begin{cases} |u|^{-1} (\log |u|^{-1})^{-2/p}\, \chi_{(-1,0)}(u) & \text{si } u \in [k,0) \\ +\infty & \text{si } u = 0 \end{cases}$$

pertenece al espacio $\mathbb{L}^p([k,0], |u|^{p/p'})$.

Por otra para v positivo tenemos:

$$\int_k^0 (v-u)^{\alpha+\beta-1}\, \mathfrak{B}_{\alpha,\beta}(|u|/v)\, g(u)\, du \geq$$

$$\geq v^{\alpha+\beta-1}\, \mathfrak{B}_{\alpha,\beta}(|k|/v) \int_0^{\mathrm{Min}(-k,1)} t^{-1}\,(\log t^{-1})^{-2/p}\, dt$$

y puesto que:

$$t^{-1}\,(\log t^{-1})^{-2/p} = \begin{cases} d/dt\,[\log\,((\log t^{-1})^{-1}] & \text{si} \quad p = 2 \\ d/dt\,[-(1-2/p)^{-1}\,(\log t^{-1})^{1-2/p}] & \text{si} \quad p > 2 \end{cases}$$

la última integral es divergente, es decir, ${}_{k,o}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta}\, g \equiv \infty$.

[81] Dado $0 \leq t \leq |k|$, escribiremos

$$h(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-1}\, \chi_{[-2^{-2n-1}k,\ -4^{-n}k]}(t).$$

Entonces si $q \geq 1$, q - finito,

$$\int_0^{-k} |h(t)|^q\, \frac{dt}{t} = \log 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-q},$$

es decir, $h \in \mathbb{L}^q([0,-k],\ 1/t)$ únicamente si $q > 1$. (En particular, se tiene $\|\ h\ \|_{\mathbb{L}^\infty([0,-k],1/t)} = 1$).

Defimos ahora $H(u) = |u|^{-1}\, h(-u)$, $u \in [k,\ 0]$, (el valor $H(0)$ lo podemos definir en forma arbitraria). Dado $p > 1$, p - finito, por construcción resulta $H \in \mathbb{L}^p([k,0],\ |u|^{p/p'})$ y si v es positivo

$$\int_k^0 (v-u)^{\alpha+\beta-1}\, \mathfrak{B}_{\alpha,\beta}(|u|/v)\, H(u)\, du \geq v^{\alpha+\beta-1}\, \mathfrak{B}_{\alpha,\beta}(|k|/v) \int_0^{-k} h(t)\, \frac{dt}{t}$$

y nuevamente ${}_{k,o}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta}\, H \equiv \infty$.

Proposición [I.3.16]

Sean $p > 1$, $q \geq 1$, ambos finitos, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ / $0 < \alpha < 1 \leq \alpha + \beta = r$.

Dados $\sigma, \lambda \in \mathbb{R}$ / $\sigma < p\,(1/p' - \beta)$, $-1 - \beta q < \lambda < -q(r - 1) - 1$ el operador ${}_{k,o}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta}: \mathbb{L}^p([k,0], |u|^{\sigma}) \longrightarrow \mathbb{L}^q([0, +\infty), v^{\lambda})$ es acotado.

Demostración.

Dado $u \in [k, 0)$ existe $M > 0$ tal que

$$[1/2\ \mathrm{Be}(\alpha, \beta)]^q \int_M^{+\infty} (v + |u|)^{q(r-1)}\, v^{\lambda}\, dv \leq$$

$$\leq \int_M^{+\infty} (v + |u|)^{q(r-1)}\, |\mathfrak{B}_{\alpha,\beta}(|u|/v)|^q\, v^{\lambda}\, dv$$

$$\leq [\mathrm{Be}(\alpha, \beta)]^q \int_M^{+\infty} (v + |u|)^{q(r-1)}\, v^{\lambda}\, dv.$$

Asimismo tenemos:

$$\int_M^{+\infty} (v + |u|)^{q(r-1)}\, v^{\lambda}\, dv \approx \int_M^{+\infty} v^{q(r-1)+\lambda}\, dv.$$

La última integral será convergente sii $\lambda < -q(r - 1) - 1$. Además:

$$\int_x^{+\infty} s^{\alpha-1}\,(1 + s)^{-\alpha-\beta}\, ds \leq \int_x^{+\infty} s^{-\beta-1}\, ds \qquad (x - \text{positivo}),$$

es decir, $\mathfrak{B}_{\alpha,\beta}(x) \leq \beta^{-1}\, x^{-\beta}$ si $x > 0$. Entonces:

$$\int_0^{-k} (v + |u|)^{q(r-1)}\, |\mathfrak{B}_{\alpha,\beta}(|u|/v)|^q\, v^{\lambda}\, dv \leq$$

$$\leq |u|^{-\beta q}\, \beta^{-q} \int_0^{-k} (v + |u|)^{q(r-1)}\, v^{\lambda+\beta q}\, dv$$

(Por hipótesis $\lambda > -1 - \beta q$)

[82] $$\leq C\ |u|^{-\beta q}$$

donde C es una constante positiva independiente de u.

Puesto que $0 < \alpha < 1$, $-1-\beta q < \lambda < -q(r-1)-1$, tenemos:

[83] $$\int_{-k}^{+\infty} (v+|u|)^{q(r-1)}\ |\mathfrak{B}_{\alpha,\beta}(|u|/v)|^q\ v^\lambda\ dv \leq D$$

donde D es una constante positiva independiente de u.

De [82] y [83] deducimos la existencia de una constante $E > 0$ independiente de u tal que

[84] $$\left[\int_0^{+\infty} |\mathfrak{J}^o_{\alpha,\beta}(u,v)|^q\ v^\lambda\ dv\right]^{1/q} \leq E\ |u|^{-\beta}.$$

Ahora dada $f \in \mathbb{L}^p([k,0],\ |u|^\sigma)$ tenemos:

$$\left[\int_0^{+\infty} |{}_{k,o}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta}\ f(v)|^q\ v^\lambda\ dv\right]^{1/q} \leq$$

(Por la desigualdad de Minkowski)

$$\leq \frac{1}{|\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)|}\int_k^0 |f(u)|\ \left[\int_0^{+\infty} |\mathfrak{J}^o_{\alpha,\beta}(u,v)|^q\ v^\lambda\ dv\right]^{1/q} du$$

(Por [84])

$$\leq \frac{E}{|\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)|}\int_k^0 |f(u)|\ |u|^{-\beta}\ du$$

$$\leq \text{Const.}\ \|\ f\ \|_{\mathbb{L}^p([k,0],(-u)^\sigma)} \qquad \blacksquare$$

<u>Nota [I.3.17]</u>

Formalmente tenemos:

$${}_{k,o}\mathfrak{D}^{1,\beta}\ f(v) = \frac{v^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\int_k^0 f(u)\ du$$

y resulta inmediato que ${}_{k,o}\mathfrak{D}^{1,\beta}\ f \in \mathbb{L}^q([0,+\infty),\ v^\lambda)$ cualquiera sea el número real λ y $q \geq 1$.

Si consideramos $\alpha > 1$, usando [8] podemos escribir:

[85] $$\mathfrak{F}^{0}_{\alpha,\beta}(u,v) \geq |u|^{\alpha-1}\, v^{\beta} \,/\, \beta.$$

Dados $p \geq 1$, p - finito, $\sigma < p/p'$ y una función $f \in \mathbb{L}^{p}([k,0], |u|^{\sigma})$ no negativa a.e., por [85] se tiene

[86] $$ {}_{k,o}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta} f(v) \geq \frac{v^{\beta}}{\Gamma(1+\beta)} \int_{k}^{0} \frac{|u|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(u)\, du.$$

En particular, la integral anterior es convergente pero, como en el caso anterior, ${}_{k,o}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta} f \notin \mathbb{L}^{q}([0, +\infty), v^{\lambda})$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $q \geq 1$.

Nota [I.3.18]

Finalizando esta sección, indicaremos las condiciones bajo las cuales se dan los resultados, que hemos desarrollado hasta ahora, en los casos generales.

Como ya hemos señalado, [I.3.2] permite la reducción del análisis a los casos tratados. En [I.3.6], el operador ${}_{r,s}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta}$ es acotado, como operador lineal entre los espacios $\mathbb{L}^{1}([r,s], w_1')$ y $\mathbb{L}^{q}([s, +\infty), w_2')$, con $1/q = 1 - r$, si se da la relación

$$w_1'(x)^{q} = \int_{s}^{+\infty} \frac{w_2'(y)}{y - x}\, dy \qquad \text{a.e.} \quad x \in [r,s].$$

El teorema [I.3.9] será válido para $1/p < r < 1$, $1/q = r - 1/p$, ahora con la obtención de un operador acotado ${}_{r,s}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta}$ entre los espacios $\mathbb{L}^{p}([r,s], w_1')$ y $\mathbb{L}^{q}([s, +\infty), w_2')$, si se reemplaza las condiciones (a) y (b2) por las nuevas condiciones (a') y (b'2), respectivamente:

(a') Están bien definidas, y son finitas, las constantes C_0' , C_1' dadas por las relaciones:

$$C_0' = \left[\int_{r}^{s} w_1'(x)^{-\frac{r}{1-r}} \frac{dx}{s-x} \right]^{1-r} \qquad C_1' = \int_{r}^{s} (s-x)^{\frac{q}{p'}-1}\, w_1'(x)\, dx$$

(b´2) $$w_1'(x) = (s - x)^{\delta} \left[\int_s^{+\infty} \frac{w_2'(y)}{(y-x)^{\frac{q}{p'}-1}}\, dy \right]^{-1} \qquad \text{a.e. } x \in [r,s]$$

donde $\delta > -q/p'$.

La Prop. [I.3.12], de la cual sigue en particular [I.3.11], es válida en el caso general, resultando ${}_{r,s}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta}$ acotado, como operador lineal entre los espacios $\mathbb{L}^1([r,s], w_1')$ y $\mathbb{L}^q([s, +\infty), w_2')$, si se reemplazan las condiciones (a) y (b) por:

(a´) existe una constante positiva ε t.q.

$$w_1'(x) \geq \varepsilon \qquad \text{a.e.} \quad x \in [r,s],$$

(b) y la integral

$$\int_s^{+\infty} (y - r)^{q(\gamma-1)}\, w_2'(y)\, dy$$

es finita, respectivamente.

Asimismo, en las mismas condiciones de [I.3.16] sigue que ${}_{r,s}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta}$ es un operador lineal contínuo entre los espacios $\mathbb{L}^p([r,s], (s-x)^{\sigma})$ y $\mathbb{L}^q([s, +\infty), (y - s)^{\lambda})$.

§4 Sobre los operadores adjuntos.

A continuación vamos a hacer uso de la identificacion corriente:

[87] $$(\mathbb{L}^p)'(\mathfrak{X}, \mu) \equiv \mathbb{L}^{p'}(\mathfrak{X}, \mu) \qquad (1 \leq p < +\infty,\ 1/p + 1/p' = 1)$$

de los espacios $\mathbb{L}^{p'}(\mathfrak{X}, \mu)$ y:

[88] $$(\mathbb{L}^p)'(\mathfrak{X}, \mu) = \left\{ \varphi\colon \mathbb{L}^p(\mathfrak{X}, \mu) \longrightarrow \mathbb{C},\ \varphi - \text{operador lineal acotado} \right\}$$

donde hemos, representado mediante el par $(\mathfrak{X},\mu)$, a un espacio de medida σ - finita arbitrario. En particular, recordemos que esta identiicación es vía un isomorfismo isométrico.

Dados entonces $f \in \mathbb{L}^p(\mathfrak{X}, \mu)$, $g \in \mathbb{L}^{p'}(\mathfrak{X}, \mu)$ escribimos:

19] $$\langle f,g\rangle_\mu = \int_{\mathfrak{X}} f(x)\,\overline{g(x)}\,d\mu(x)$$

se realiza de esta manera, cada elemento de $\mathbb{L}^{p'}(\mathfrak{X}, \mu)$, como un funcional lineal acotado sobre $\mathbb{L}^p(\mathfrak{X}, \mu)$. Asimismo, siguiendo la nomenclatura corriente, si $(\mathfrak{X}, \mu)$, $(\mathfrak{Y}, \nu)$ son espacios de medida σ - finita $T: \mathbb{L}^p(\mathfrak{X}, \mu) \longrightarrow \mathbb{L}^q(\mathfrak{Y}, \nu)$ es un operador acotado $(1 \le p,\ q < +\infty)$, indicamos mediante:

20] $$T': (\mathbb{L}^q)'(\mathfrak{Y}, \nu) \longrightarrow (\mathbb{L}^p)'(\mathfrak{X}, \mu)$$

l operador adjunto de T, definido por:

21] $$(T'\varphi)(x) = \varphi(T(x)) \qquad (x \in \mathfrak{X}).$$

<u>Proposición [I.4.1]</u>

Si α, β son números complejos con partes reales positivas, escribiendo:

$$\left\{\begin{aligned} r &= \Re(\alpha + \beta), \\ \frac{1}{q} &= \frac{1}{p} - r, \end{aligned}\right. \qquad \begin{array}{c} 1 < q < +\infty,\ 1 < p \\ \text{o} \\ p = 1,\ q - \text{finito} \end{array}$$

se tiene: $({}_{r,s}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta})' \in \mathbb{L}_{q' \longrightarrow p'}([s,+\infty), [r,s])$ y, si $g \in \mathbb{L}^{q'}([s, +\infty))$ entonces:

$$({}_{r,s}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta})' g(x) = \frac{1}{\Gamma(\overline{\alpha})\,\Gamma(\overline{\beta})} \int_s^{+\infty} \mathfrak{F}^s_{\overline{\alpha},\,\overline{\beta}}(x,y)\, g(y)\, dy$$

a.e. $x \in [r,s]$.

<u>Demostración:</u>

Sean $f \in \mathbb{L}^p([r,s])$, $g \in \mathbb{L}^{q'}([s, +\infty))$; entonces:

$$\left| \langle {}_{r,s}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta} f,\ g \rangle_{dx} \right| \le \| {}_{r,s}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta} f \|_{\mathbb{L}^q([s,+\infty))} \| g \|_{\mathbb{L}^{q'}([s,+\infty))}$$

[92] $$\leq \text{Const.}\ \| f \|_{\mathbb{L}^{p}((r,s))} \| g \|_{\mathbb{L}^{q'}((s,+\infty))}$$

como sigue por la desigualdad de Hölder. Por [I.3.4] la última expresión es finita. Tenemos ahora:

$$< {}_{r,s}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta} f(y),\ g(y) >_{dy} =$$

$$= \int_{s}^{+\infty} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)} \int_{r}^{s} \mathfrak{F}^{s}_{\alpha,\beta}(x,y)\ f(x)\ dx \right] \overline{g(y)}\ dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)} \int_{r}^{s} f(x) \left[\int_{s}^{+\infty} \mathfrak{F}^{s}_{\alpha,\beta}(x,y)\ \overline{g(y)}\ dy \right] dx$$

$$= \int_{r}^{s} f(x)\ \overline{\frac{1}{\Gamma(\overline{\alpha})\ \Gamma(\overline{\beta})} \int_{s}^{+\infty} \mathfrak{F}^{s}_{\overline{\alpha},\overline{\beta}}(x,y)\ g(y)\ dy}\ dx$$

[93] $$= < f(x),\ ({}_{r,s}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta})' g(x) >_{dx}$$

de donde sigue la tesis ∎

<u>Proposición [I.4.2]</u>

Consideramos dos números reales fijos r, s, t.q. r < s, y sendos pesos w'_1, w'_2 definidos a.e. sobre [r,s] y [s, +∞) respectivamente, en las condiciones establecidas para el caso general en [I.3.18].

Es válida la siguiente representación:

[94] $$({}_{r,s}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta})' g(x) = \frac{w'_1(x)^{-1}}{\Gamma(\overline{\alpha})\ \Gamma(\overline{\beta})} \int_{s}^{+\infty} \mathfrak{F}^{s}_{\overline{\alpha},\overline{\beta}}(x,y)\ g(y)\ w'_2(y)\ dy$$

a.e. x ∊ [r,s].

<u>Demostración:</u>

Haremos la prueba de b), ya que en los casos restantes el argumento a utilizarse será básicamente el mismo.

Sean $f \in \mathbb{L}^{p}([r,s],\ w_1')$, $g \in \mathbb{L}^{q'}([s,\ +\infty),\ w_2')$; entonces:

$$\left| \left\langle {}_{r,s}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta} f(y),\ g(y) \right\rangle_{w_2'(y)dy} \right| \leq$$

$$\leq \left\| {}_{r,s}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta} f \right\|_{\mathbb{L}^{q}([s,+\infty),w_2')} \left\| g \right\|_{\mathbb{L}^{q'}([s,+\infty),w_2')}$$

[95]

$$\leq \text{Const.} \left\| f \right\|_{\mathbb{L}^{p}([r,s],w_1')} \left\| g \right\|_{\mathbb{L}^{q'}([s,+\infty),w_2')}$$

como sigue por la desigualdad de Hölder. Por [I.3.18] la última expresión es finita. Además:

$$\left\langle {}_{r,s}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta} f(y),\ g(y) \right\rangle_{w_2'(y)dy} =$$

$$= \int_{s}^{+\infty} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)} \int_{r}^{s} \mathfrak{F}^{s}_{\alpha,\beta}(x,y)\ f(x)\ dx \right] \overline{g(y)}\ w_2'(y)\ dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)} \int_{r}^{s} f(x) \left[\int_{s}^{+\infty} \mathfrak{F}^{s}_{\alpha,\beta}(x,y)\ \overline{g(y)}\ w_2'(y)\ dy \right] dx$$

$$= \int_{r}^{s} f(x)\ \overline{\frac{1}{\Gamma(\overline{\alpha})\ \Gamma(\overline{\beta})} \int_{s}^{+\infty} \mathfrak{F}^{s}_{\overline{\alpha},\overline{\beta}}(x,y)\ g(y)\ w_2'(y)\ dy}\ dx$$

[96] $$= \left\langle f(x),\ \left({}_{r,s}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta}\right)' g(x) \right\rangle_{w_1'(x)dx}$$

de donde sigue la tesis ∎

§5 El análisis puntual

Proposición [I.5.1]

(1) Es válida la desigualdad:

$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{z^n}{n} \right| \le \frac{|z|^N}{N} \frac{1}{1-|z|} \qquad (N \in \mathbb{N};\ z \in \mathbb{C},\ |z| < 1).$$

(2) Si $\zeta \in \mathbb{C} - \{0, -1, -2, \dots\}$ y $p > 1$, entonces:

$$\operatorname{Sup}\left\{ p^{-n} \left| \binom{\zeta - 1}{n} \right| : n \in \mathbb{N} \right\} < \infty.$$

Demostración:

(1)
$$\left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{z^n}{n} \right| = \left| z^N \sum_{n=N}^{\infty} \frac{z^{n-N}}{n} \right|$$

$$= \left| z^N \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{N+k} \right|$$

$$\le \frac{|z|^N}{N} \sum_{k=0}^{\infty} |z|^k$$

$$= \frac{|z|^N}{N} \frac{1}{1-|z|}.$$

(2) Sea $n_o = \left[\frac{|\zeta|}{p-1} \right]$. Dado $n \in \mathbb{N}$ podemos escribir:

[97] $$p^{-n} \left| \binom{\zeta - 1}{n} \right| = \prod_{j=1}^{n} \left[\frac{1}{p} \left| 1 - \frac{\zeta}{j} \right| \right].$$

Si $n_o = 0$, i.e. si $0 < |\zeta| < p - 1$, dado $j \in \mathbb{N}$ resultaría:

[98] $$\frac{|\zeta|}{p-1} < 1 \le j,$$

de modo que

[99] $$\left| 1 - \frac{\zeta}{j} \right| \le 1 + \frac{|\zeta|}{j} < p$$

y por [98] y [99] podemos concluir que:

[100] $$\operatorname{Sup}\left\{ p^{-n} \left| \binom{\zeta - 1}{n} \right| : n \in \mathbb{N} \right\} \leq 1.$$

Si $n_o \geq 1$, dado $j > n_o$ tenemos:

[101] $$\frac{|\zeta|}{p - 1} < n_o + 1 \leq j$$

de donde

[102] $$\left| 1 - \frac{\zeta}{j} \right| \leq 1 + \frac{|\zeta|}{j} < p.$$

Por lo tanto si $n > n_o$ escribimos:

$$p^{-n} \left| \binom{\zeta - 1}{n} \right| \leq \prod_{j=1}^{n_o} \left[\frac{1}{p} \left| 1 - \frac{\zeta}{j} \right| \right]$$

[103] $$= p^{-n_o} \left| \binom{\zeta - 1}{n_o} \right|.$$

En consecuencia:

$$\operatorname{Sup}\left\{ p^{-n} \left| \binom{\zeta - 1}{n} \right| : n \in \mathbb{N} \right\} = \operatorname*{Max}_{0 \leq n \leq n_o} \left\{ p^{-n} \left| \binom{\zeta - 1}{n} \right| \right\}$$

de donde sigue (2) ∎

Proposición [I.5.2]

Dados dos números complejos α, β con partes reales positivas y una función localmente integrable $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, es válida la identidad:

$${}_{r,s}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_r^s (t - u)^{\alpha+\beta-1} f(u)\, du -$$

$$- \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{\operatorname{Be}(\alpha,n)}\, {}_rI_s^{-\alpha-n-1} \left[f(s) \frac{(t - s)^{\beta-n-1}}{\Gamma(\beta - n)} \right]$$

a.e. $t \geq s$. En particular, la serie anterior se reduce a la suma de los primeros β sumandos, en el caso que β sea un entero positivo.

Demostración:

Escribimos:

$$ {}_{r,s}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta} f(t) = $$

(por [I. 3. 1])

$$ = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)} \int_r^s \mathfrak{F}^s_{\alpha,\beta}(u,t)\ f(u)\ du $$

(por [I. 2. 4](a))

$$ = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)} \int_r^s (t-u)^{\alpha+\beta-1}\ \mathfrak{B}_{\alpha,\beta}\left(\frac{s-u}{t-s}\right) f(u)\ du $$

(por [I. 2. 3])(b)

$$ = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_r^s (t-u)^{\alpha+\beta-1}\ f(u)\ du - $$

$$ - \frac{1}{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)} \int_r^s (t-u)^{\alpha+\beta-1}\ \mathfrak{B}_{\beta,\alpha}\left(\frac{t-s}{s-u}\right) f(u)\ du $$

(por [I. 2. 2])

$$ = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_r^s (t-u)^{\alpha+\beta-1}\ f(u)\ du - $$

[104]

$$ - \int_r^s f(u)\ \frac{(t-u)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} \binom{\beta-1}{n} \left(\frac{s-u}{t-u}\right)^{n+\alpha} du. $$

Por otra parte, dado un entero positivo N escribimos:

$$ \left| \int_r^s f(u)\ \frac{(t-u)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)} \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} \binom{\beta-1}{n} \left(\frac{s-u}{t-u}\right)^{n+\alpha} du \right| \leq $$

$$ \leq \int_r^s |f(u)|\ \frac{(t-u)^{\mathfrak{r}-1}}{|\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)|} \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{|n+\alpha|} \left|\binom{\beta-1}{n}\right| \left(\frac{s-u}{t-u}\right)^{n} du $$

[105]

$$ \leq \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{n+\Re(\alpha)} \left|\binom{\beta-1}{n}\right| \left(\frac{s-r}{t-r}\right)^{n} \int_r^s |f(u)|\ \frac{(t-u)^{\mathfrak{r}-1}}{|\Gamma(\alpha)\ \Gamma(\beta)|}\ du $$

(por [9] y [I. 5. 2](2))

$$\leq S \frac{\Gamma(\mathfrak{r})}{|\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)|}\ {}_rI_t^{-\mathfrak{r}}\ |f(t)| \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{s-r}{t-r} \right)^{n/2},$$

donde hicimos:

[106] $$S = \operatorname{Sup}\left\{ \left(\frac{s-r}{t-r} \right)^{n/2} \left| \binom{\beta-1}{n} \right| : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Por [I.5.2](1) en [106] resulta:

$$\left| \int_r^s f(u) \frac{(t-u)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} \binom{\beta-1}{n} \left(\frac{s-u}{t-u} \right)^{n+\alpha} du \right| \leq$$

(hacemos $\mathfrak{r} = \Re(\alpha+\beta)$)

[107] $$\leq S \frac{\Gamma(\mathfrak{r})}{|\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)|}\ {}_rI_t^{-\mathfrak{r}}\ |f(t)|\ N^{-1} \left(\frac{s-r}{t-r} \right)^N \frac{t-r}{t-s}.$$

Como N es arbitrario concluímos entonces:

$$\int_r^s f(u) \frac{(t-u)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} \binom{\beta-1}{n} \left(\frac{s-u}{t-u} \right)^{n+\alpha} du =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} \binom{\beta-1}{n} \int_r^s f(u) \frac{(t-u)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \left(\frac{s-u}{t-u} \right)^{n+\alpha} du$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} \binom{\beta-1}{n} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_r^s f(u)\,(s-u)^{n+\alpha}\,(t-u)^{\beta-n-1}\,du$$

[108]

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{\operatorname{Be}(\alpha,n)}\ {}_rI_s^{-\alpha-n-1} \left[f(s) \frac{(t-s)^{\beta-n-1}}{\Gamma(\beta-n)} \right].$$

De [104] y [108] sigue la tesis ∎

Nota [1.5.3]

De la relación [15], con la notación y en las condiciones precedentes, la siguiente relación es válida a.e. $t \geq s$:

$${}_{r,s}I^{\alpha,\beta} f(t) = {}_rI_t^{-\alpha-\beta} f(t) -$$

$$- \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{Be(\alpha,n)} \, {}_rI_s^{-\alpha-n-1} \left[f(s) \frac{(t-s)^{\beta-n-1}}{\Gamma(\beta-n)} \right].$$

Tenemos entonces una medida exacta de la desviación que se produce al efectuar integraciones iteradas de orden α y β (en la terminología empleada por Bertram Ross) y una integral fraccionaria de orden $\alpha + \beta$.

Proposición [I.5.4]

Sean $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ una función localmente integrable, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ números complejos con partes reales positivas, $r, s \in \mathbb{R}$, $r < s$. Entonces si N es un entero positivo dado, para $t > s$, excepto quizás algún subconjunto de medida nula de la semirrecta $(s, +\infty)$, resulta:

$$\Bigg| {}_{r,s}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta} f(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_r^s (t-u)^{\alpha+\beta-1} f(u)\, du +$$

$$- \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{Be(\alpha,n)} \, {}_rI_s^{-\alpha-n-1} \left[f(s) \frac{(t-s)^{\beta-n-1}}{\Gamma(\beta-n)} \right] \Bigg|$$

$$\leq \text{Const.} \ \frac{1}{N} \left(\frac{s-r}{t-r} \right)^{N/2}$$

siendo la constante anterior independiente de N.

Demostración:

Comenzamos escribiendo:

$$\left| \int_r^s f(u)\, (s-u)^{n+\alpha} (t-u)^{\beta-n-1} du \right| \leq$$

$$\leq \int_r^s |f(u)| \, (s-u)^{\Re(\alpha)+n} \, (t-u)^{\Re(\beta)-n-1} du$$

$$\le \left(\frac{s - r}{t - r} \right)^n \int_r^s |f(u)| \; (s - u)^{\Re(\alpha)} \; (t - u)^{\Re(\beta) - 1} \, du$$

[109]

$$\le C_1 \left(\frac{s - r}{t - r} \right)^n \| f \|_{\mathbb{L}^1((r,s))},$$

donde la constante C_1 anterior depende de r, s y t.

Vamos a indicar:

[110]
$$C_2 = \mathrm{SUP} \left\{ \left| \binom{\beta - 1}{n} \right| \left(\frac{s - r}{t - r} \right)^{n/2} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ahora:

$$\left| {}_{r,s}\mathfrak{D}^{\alpha,\beta} f(t) - \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_r^s (t - u)^{\alpha+\beta-1} f(u) \, du + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{Be(\alpha,n)} \, {}_rI_s^{-\alpha-n-1} \left[f(s) \frac{(t - s)^{\beta-n-1}}{\Gamma(\beta - n)} \right] \right|$$

(por [108])

$$= \left| \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{Be(\alpha,n)} \, {}_rI_s^{-\alpha-n-1} \left[f(s) \frac{(t - s)^{\beta-n-1}}{\Gamma(\beta - n)} \right] \right|$$

(por [109])

$$\le \frac{C_1}{|\Gamma(\alpha) \; \Gamma(\beta)|} \| f \|_{\mathbb{L}^1((r,s))} \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{|n + \alpha|} \left| \binom{\beta - 1}{n} \right| \left(\frac{s - r}{t - r} \right)^n$$

(por [I. 5. 1](2) y [110])

$$\le \frac{C_1 . C_2}{|\Gamma(\alpha) \; \Gamma(\beta)|} \| f \|_{\mathbb{L}^1((r,s))} \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{s - r}{t - r} \right)^{n/2}$$

(por [I. 5. 1](1))

$$\le \frac{C_1 . C_2}{|\Gamma(\alpha) \; \Gamma(\beta)|} \frac{\| f \|_{\mathbb{L}^1((r,s))}}{1 - \left(\frac{s - r}{t - r} \right)^{1/2}} \frac{1}{N} \left(\frac{s - r}{t - r} \right)^{N/2} \qquad \blacksquare$$

Parte II.

Los espacios $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}$.

§1 Sobre los espacios $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}$.

Proposición [II.1.1]

Sean α, β números complejos con partes reales positivas; entonces:

$$\mathfrak{B}_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \mathbb{M}\left[e^{-s}\, \Gamma(\alpha, sx) \right](\beta)$$

donde x es un número positivo, $\mathfrak{B}_{\alpha,\beta}$ está dada por (o) y, en general:

$$\text{[111]} \qquad \mathbb{M}[f](\zeta) = \int_0^{+\infty} s^{\zeta-1} f(s)\, ds$$

es la transformada de Mellin de una función $\mathbb{C}$ - valuada $f = f(s)$ (toda vez que la expresión [111] posea sentido), evaluada en $\zeta \in \mathbb{C}$ y, además:

$$\Gamma(\lambda, y) = \Gamma(\lambda) - \gamma(\lambda, y) = \int_y^{+\infty} s^{\lambda-1} e^{-s}\, ds$$

representa la función gamma incompleta en los parámetros $\lambda \in \mathbb{C}$, $y \in \mathbb{R}^+$.

Demostración:

$$\mathfrak{B}_{\alpha,\beta}(x) =$$

$$= \int_x^{+\infty} s^{\alpha-1} (1 + s)^{-\alpha-\beta}\, ds$$

$$= x^{\alpha} \int_1^{+\infty} t^{\alpha-1} (1 + tx)^{-\alpha-\beta}\, dt$$

$$= x^{\alpha} \int_1^{+\infty} t^{\alpha-1} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \int_0^{+\infty} u^{\alpha+\beta-1} e^{-(1+tx)u}\, du \right] dt$$

$$= \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_{0}^{+\infty} u^{\alpha+\beta-1}\, e^{-u} \left[\int_{1}^{+\infty} t^{\alpha-1}\, e^{-txu}\, dt \right] du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_{0}^{+\infty} u^{\beta-1}\, e^{-u} \left[\int_{xu}^{+\infty} v^{\alpha-1}\, e^{-v}\, dv \right] du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_{0}^{+\infty} u^{\beta-1}\, e^{-u}\, \Gamma(\alpha, xu)\, du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \, \mathbb{M} \left[e^{-u}\, \Gamma(\alpha, ux) \right](\beta) \quad \blacksquare$$

Nota [II.1.2].

A raíz de la proposición anterior, vemos que cada una de las aplicaciones:

[112] $$\beta \xrightarrow{\mathfrak{b}(\alpha,x)} \Gamma(\alpha+\beta)\, \mathfrak{B}_{\alpha,\beta}(x),$$

definidas sobre el semiplano

$$\mathbb{C}^{+} = \left\{ \beta \in \mathbb{C} : \Re(\beta) > 0 \right\},$$

admite la "antitransformada" de Mellin definida mediante:

[113] $$\mathbb{M}^{-1}[\mathfrak{b}(\alpha,x)](u) = e^{-u}\, \Gamma(\alpha, ux), \qquad (u > 0).$$

Vamos a indicar más brevemente:

[114] $$f_{\alpha,x}(u) = e^{-u}\, \Gamma(\alpha, ux), \qquad (u > 0).$$

Notemos, en particular, que las funciones así definidas son infinitamente derivables sobre $\mathbb{R}^{+}$; por otra parte tenemos:

[115] $$\frac{d}{du} f_{\alpha,x}(u) = - f_{\alpha,x}(u) - x^{\alpha}\, u^{\alpha-1}\, e^{-(1+x)u}.$$

Por otra parte, dado un entero positivo k y una función $\mathbb{C}$ - valuada g con derivadas suaves hasta el orden k resulta:

[116] $$(-1)^{k}\, g^{(k)} = g + \sum_{p=0}^{k-1} (-1)^{p+1} \left(g^{(p)} + g^{(p+1)} \right).$$

Esta última identidad puede establecerse por computación directa o por inducción en k.

Además, dados dos enteros positivos p, k, $p \le k$, de [116] sigue:

$$-\left[f^{(p)}_{\alpha,x}(u) + f^{(p+1)}_{\alpha,x} \right] =$$

[117]
$$= x^{\alpha} \frac{d^p}{du^p} \left[u^{\alpha-1} e^{-(1+x)u} \right]$$
$$= x^{\alpha} \sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-q)} u^{\alpha-1-q} (-1-x)^{p-q} e^{-(1+x)u}$$

Usando [116] y la relación anterior:

$$(-1)^k f^{(k)}_{\alpha,x}(u) - f_{\alpha,x}(u) =$$

[118]
$$= x^{\alpha} e^{-(1+x)u} \sum_{p=0}^{k-1} (-1)^p \sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-q)} u^{\alpha-1-q} (-1-x)^{p-q}$$
$$= x^{\alpha} e^{-(1+x)u} \sum_{q=0}^{k-1} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-q)} u^{\alpha-1-q} (-1-x)^{-q} \sum_{p=q}^{k-1} \binom{p}{q} (1+x)^p$$

Escribiremos:

[119]
$$\mathfrak{U}^k_q(x) = \sum_{p=q}^{k-1} \binom{p}{q} (1+x)^p \qquad (q < k),$$

de modo que:

$$(-1)^k f^{(k)}_{\alpha,x}(u) - f_{\alpha,x}(u) =$$

[120]
$$= x^{\alpha} e^{-(1+x)u} \sum_{q=0}^{k-1} (1-\alpha)_q \, u^{\alpha-1-q} (1+x)^{-q} \mathfrak{U}^k_q(x)$$

Consideremos un número positivo $\mathfrak{r}$; resulta entonces:

[121] $$u^{k+\mathfrak{r}} |\ln u|^h f^{(k)}_{\alpha,x}(u) \longrightarrow 0 \quad (u \longrightarrow 0^+ \ / \ u \longrightarrow +\infty)$$

cualesquiera sean los enteros no negativos k, h.

En efecto, de [114] y [120] basta notar que si a, b son números positivos cualesquiera, n es un entero no negativo, entonces:

[122] $$e^{-au}\, u^{b}\, |\ln u|^{n} \longrightarrow 0 \quad (u \longrightarrow 0^{+} \;/\; u \longrightarrow +\infty)$$

[123] $$e^{-au}\, \Gamma(\alpha,\, ux)\, u^{b}\, |\ln u|^{n} \longrightarrow 0 \quad (u \longrightarrow 0^{+} \;/\; u \longrightarrow +\infty)$$

Definición [II.1.3]

Dado un número real r, llamamos $\mathfrak{M}_r$ al conjunto de todas las funciones f: $(0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que:

(a) f es infinitamente derivable en todo su dominio.

(b) Dados enteros no negativos k, h cualesquiera resulta:

$$t^{k+r}\, |\ln t|^{h}\, |\, f^{(k)}(t)| \longrightarrow 0 \quad (t \longrightarrow 0^{+} \;/\; t \longrightarrow +\infty)$$

Nota [II.1.4]

Por [II.1.2] sigue que:

$$\bigcap_{r>0} \mathfrak{M}_r \neq \emptyset$$

Nota [II.1.5]

Es inmediato que $\mathfrak{M}_r$ admite una estructura vectorial compleja natural; dada $f \in \mathfrak{M}_r$ y enteros no negativos k, h, podemos definir:

$$\gamma^{[r]}_{k,h}(f) = \sup_{t>0}\, t^{k+r}\, |\ln t|^{h}\, |\, f^{(k)}(t)|$$

De esta forma, la familia de seminormas $\{ \gamma^{[r]}_{k,h} \}_{k,h}$ indúce sobre $\mathfrak{M}_r$ una estructura de espacio vectorial topológico localmente convexo.

Proposición [II.1.6]

Sea f: $(0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ una función indefinidamente derivable.

Entonces $f \in \mathfrak{M}_r$ si y solo si la función:

$$f_0(x) = e^{-rx}\, f(e^{-x}) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

es temperada, i.e. sii $f_0 \in S(\mathbb{R})$.

Demostración:

Supongamos que $f \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}$; dado $k \in \mathbb{N}_o$, x real, tenemos:

[124] $$f_o^{(k)}(x) = \sum_{p=o}^{k} \binom{k}{p} (-\mathfrak{r})^{k-p} e^{-\mathfrak{r}x} \frac{d^p}{dx^p}[f(e^{-x})].$$

En general, podemos escribir:

[125] $$\frac{d^p}{dx^p}[f(e^{-x})] = \sum_{q=1}^{p} c_q^p \, e^{-qx} f^{(q)}(e^{-x}) \qquad (p \geq 1)$$

donde los coeficientes c_q^p's son números enteros que no dependen de f.

Escribiremos:

[126] $$\mathfrak{N}_q^k = \sum_{p=q}^{k} \binom{k}{p} (-\mathfrak{r})^{k-p} c_q^p.$$

De las fórmulas anteriores:

[127] $$f_o^{(k)}(x) = (-\mathfrak{r})^k e^{-\mathfrak{r}x} f(e^{-x}) + e^{-\mathfrak{r}x} \sum_{q=1}^{k} \mathfrak{N}_q^k \, e^{-qx} f^{(q)}(e^{-x})$$

Dado ahora otro entero no negativo h tenemos:

[128] $$\begin{aligned} | x^h f_o^{(k)}(x) | &\leq |\mathfrak{r}|^k e^{-\mathfrak{r}x} |x^h f(e^{-x})| + \\ &\quad + \sum_{q=1}^{k} | \mathfrak{N}_q^k | \, e^{-(q+\mathfrak{r})x} \, | x^h f^{(q)}(e^{-x})| \\ &\leq |\mathfrak{r}|^k \gamma_{o,h}^{[\mathfrak{r}]}(f) + \sum_{q=1}^{k} | \mathfrak{N}_q^k | \, \gamma_{q,h}^{[\mathfrak{r}]}(f) \end{aligned}$$

Como $f \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}$ esta última expresión es finita, y como k, h son arbitrarios la condición es necesaria.

Recíprocamente, supongamos que $f_o \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Podemos escribir:

[129] $$f(t) = t^{-\mathfrak{r}} f_o(-\ln t) \qquad (t > 0).$$

Dado un entero positivo r tenemos:

[130]
$$\frac{d^r}{dt^r}[f_o(-\ln t)] = t^{-r} \sum_{s=1}^{r} d_s^r \, f_o^{(s)}(-\ln t)$$

donde las constantes d_s^r's son enteras e independientes de f_o; en particular, haremos

[131]
$$d_s^r = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad r = 0,\ s = 0, \\ 0 & \text{si} \quad r \geq 1,\ s = 0 \ \text{ o bien } \ r = 0,\ s > 0. \end{cases}$$

Dado ahora un entero positivo l resulta:

[132]
$$f^{(l)}(t) = t^{-\mathfrak{r}-l} \sum_{r=0}^{l} \binom{l}{r} \frac{\Gamma(1-\mathfrak{r})}{\Gamma(1+r-\mathfrak{r}-l)} \sum_{s=0}^{r} d_s^r \, f_o^{(s)}(-\ln t)$$

Haciendo entonces:

[133]
$$\mathfrak{I}_s^l = \sum_{r=s}^{l} d_s^r \binom{l}{r} \frac{\Gamma(1-\mathfrak{r})}{\Gamma(1+r-\mathfrak{r}-l)},$$

tenemos:

[134]
$$f^{(l)}(t) = t^{-\mathfrak{r}-l} \sum_{s=0}^{l} \mathfrak{I}_s^l \, f_o^{(s)}(-\ln t).$$

De la expresión anterior, dado un entero no negativo m sigue:

[135]
$$t^{\mathfrak{r}+l} \, |\ln t|^m \, | f^{(l)}(t)| \leq \sum_{s=0}^{l} |\mathfrak{I}_s^l| \, |\ln t|^m \, |f_o^{(s)}(-\ln t)|$$

y como asumimos que f_o es una función temperada, sigue la tesis ∎

<u>Ejemplos [II.1.7]</u>

(a) Dado $\mathfrak{r} \in \mathbb{R}$, la función $f(t) = t^{-\mathfrak{r}-\ln t}$ $(t > 0)$, pertenece al espacio $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}$; esto sigue enseguida como consecuencia de la proposición anterior.

(b) Escribiendo $f(t) = t^{\lambda} (1 + t)^{\mu}$ (t - positivo), donde λ, μ son números complejos fijos, se tiene $f \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}$ sii $-\Re(\lambda) < \mathfrak{r} < -\Re(\mu + \lambda)$.

(c) Sea $f(t) = \ln(1 + t)$ (t - positivo); entonces $f \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}$ si y solo si $-1 < \mathfrak{r} < 0$.

(d) Dado $r \in \mathbb{R}$, se define:

[136] $$f(t) = t^{-r} \ln t \operatorname{Cosech}(\ln t) \qquad (t > 0)$$

Entonces $f \in \mathfrak{M}_r$. En efecto, bastará ver que la aplicación

[137] $$e^{-xr} f(e^{-x}) = x \operatorname{Cosech} x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

es temperada. Escribiremos:

[138] $$\vartheta(x) = x \operatorname{Cosech} x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

En particular, cabe aclarar que ϑ no está propiamente definida en el cero, pero resulta:

$$\lim_{x \to 0} \vartheta(x) = 1$$

i.e. ϑ posee una discontinuidad evitable en $x = 0$, y consideramos entonces $\vartheta(0) = 1$.

Dado k entero positivo, probaremos que:

[139] $$\vartheta^{(k)}(x) = (e^x - e^{-x})^{-k-1} \sum_{m=-k}^{k} P_m^k(x)\, e^{mx}$$

donde los P_m^k 's son funciones lineales del tipo:

[140] $$P_m^k(x) = a_m^k\, x + b_m^k \quad , \quad a_m^k = a_{-m}^k \quad , \quad b_m^k = - b_{-m}^k \quad (|m| \leq k)$$

siendo las constantes a_m^k 's, b_m^k 's funciones de k y m.

En particular, tenemos:

[141] $$\vartheta'(x) = (e^x - e^{-x})^{-2} \left[(-2x - 2)\, e^{-x} + (-2x + 2)\, e^x \right]$$

y se verifica nuestra afirmación.

Suponiendo cierta la fórmula [139] para k escribimos:

$$\vartheta^{(k+1)}(x) =$$

$$= (e^x - e^{-x})^{-k-2} \sum_{m=-k+1}^{k+1} \left[(-k-1)\, P_{m-1}^k(x) + a_{m-1}^k + (m-1)\, P_{m-1}^k(x) \right] e^{mx}$$

[142]

$$+ (e^x - e^{-x})^{-k-2} \sum_{m=-k-1}^{k-1} \left[(-k-1)\, P_{m+1}^k(x) - a_{m+1}^k + (m+1)\, P_{m+1}^k(x) \right] e^{mx}$$

Hacemos entonces:

$$\left|\begin{array}{l|l} P^{k+1}_{k+1}(x) = -a^k_k\, x + a^k_k - b^k_k & P^{k+1}_{k}(x) = -2\,a^k_{k-1} x + a^k_{k-1} - 2\,b^k_{k-1} \\ & \qquad\qquad [143] \\ P^{k+1}_{-k-1}(x) = -a^k_{-k}\, x - a^k_{-k} - b^k_{-k} & P^{k+1}_{-k}(x) = -2\,a^k_{-k+1} x - a^k_{-k+1} - 2\,b^k_{-k+1} \\ \hline \multicolumn{2}{l}{P^{k+1}_m(x) = (-k+m-2)\,P^k_{m-1}(x) - (k+m+2)\,P^k_{m+1}(x) + a^k_{m-1} - a^k_{m+1} \;(|m| \le k-1)} \end{array}\right.$$

y de las fórmulas anteriores siguen enseguida los valores a^{k+1}_m's , b^{k+1}_m's.

Haciendo uso de [140] se tiene $a^k_k = a^k_{-k}$ y $a^k_{k-1} = a^k_{-k+1}$ y, por [143] resulta:

[144] $$a^{k+1}_{k+1} = a^{k+1}_{-k-1} = -\,a^k_k \qquad y \qquad a^{k+1}_k = a^{k+1}_{-k} = -2\,a^k_{k-1}.$$

Además:

$$\begin{cases} b^{k+1}_{k+1} = a^k_k - b^k_k = a^k_{-k} + b^k_{-k} = -\,(-\,a^k_{-k} - b^k_{-k}) = -\,b^{k+1}_{-k-1} \\ \qquad\qquad\qquad [145] \\ b^{k+1}_k = a^k_{k-1} - 2\,b^k_{k-1} = a^k_{-k+1} + 2\,b^k_{-k+1} = -\,(-a^k_{-k+1} - 2\,b^k_{-k+1}) = -b^{k+1}_{-k} \end{cases}$$

Por otra parte dado un entero m tal que $|m| \le k-1$ se puede escribir:

$$\begin{aligned} b^{k+1}_m = p^{k+1}_m(0) &= (-k+m-2)\,P^k_{m-1}(0) - (k+m+2)\,P^k_{m+1}(0) + a^k_{m-1} - a^k_{m+1} \\ &= (-k+m-2)\,b^k_{m-1} - (k+m+2)\,b^k_{m+1} + a^k_{m-1} - a^k_{m+1} \\ &= -(-k+m-2)\,b^k_{-m+1} + (k+m+2)\,b^k_{-m-1} + a^k_{-m+1} - a^k_{-m-1} \\ &= -(-k+m-2)\,P^k_{-m+1}(0) + (k+m+2)\,P^k_{-m-1}(0) + a^k_{-m+1} - a^k_{-m-1} \end{aligned}$$

[146]

$$= -\,P^{k+1}_{-m}(0) = -\,b^{k+1}_{-m}$$

y, por otra parte:

$$\begin{aligned} a^{k+1}_m = \frac{dP^{k+1}_m}{dx} &= (-k+m-2)\,\frac{dP^k_{m-1}}{dx} - (k+m+2)\,\frac{dP^k_{m+1}}{dx} \\ &= (k+m-2)\,a^k_{m-1} - (k+m+2)\,a^k_{m+1} \end{aligned}$$

[147]

$$= (k+m-2)\,a^k_{-m+1} - (k+m+2)\,a^k_{-m-1} = a^{k+1}_{-m}$$

resultando válido el paso inductivo.

De las relaciones [140] y [141] se deduce entonces la relación

[148] $$\vartheta^{(k)}(x) = 2^{-k}\ \mathrm{Cosech}^{k+1}x \sum_{m=0}^{k} [a_m^k\ x\ \mathrm{Ch}(mx) + b_m^k\ \mathrm{Sh}(mx)]$$

la cual es válida para $k \in \mathbb{N}_o$, y x cualquier número real no nulo.

Puesto que ϑ deviene en una función analítica en todo punto el eje real, posee derivadas suaves de todos los órdenes (aún en cero).

Sean ahora: $n \in \mathbb{N}$, m, k enteros no negativos t.q. $m \leq k$.

Entonces:

[149] $$\left| x^n \frac{e^{mx} + e^{-mx}}{(e^x + e^{-x})^{k+1}} \right| = \frac{|x|^n\ (1 + \exp(-2m\ |x|))}{\exp[(k+1-m)|x|]\ (1 - \exp(-2\ |x|))^{k+1}}$$

$$\left| x^{n-1} \frac{e^{mx} - e^{-mx}}{(e^x - e^{-x})^{k+1}} \right| = \frac{|x|^{n-1}\ |1 - \exp(-2m\ |x|)|}{\exp[(k+1-m)|x|]\ |1 - \exp(-2\ |x|)|^{k+1}}$$

De las fórmulas [148] y [149] resulta:

[150] $$\lim_{x \longrightarrow +\infty} |x^n\ \vartheta^{(m)}(x)| = 0$$

cuando m, n son enteros no negativos cualesquiera; como $\vartheta \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ sigue, en definitiva, que ϑ es temperada.

§2 Sobre las estructuras algebraica y topológica de $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}$.

Proposición [II.2.1]

El espacio $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^+)$, de las funciones $\mathbb{C}$ - valuadas indefinidamente derivables con soporte compacto contenido en la semirrecta $(0, +\infty)$, es denso en $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}$.

Demostración:

Sean $f \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}$ y hagamos:

$$\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq 1 \\ \exp\left(\dfrac{x^2}{x^2 - 1} \right) & \text{si } |x| \leq 1 \end{cases} \qquad [151]$$

En particular, $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$ y $\mathrm{Sop}(\xi) = [-1, 1]$.

Dado $n \in \mathbb{N}$ definimos:

$$f_n(t) = f(t)\, \xi\left(\frac{\ln t}{n} \right) \chi_{[e^{-n},\, e^{n}]}(t) \qquad (t \in \mathbb{R}^+) \qquad [152]$$

donde $\chi_{[e^{-n},\, e^{n}]}$ es la función característica del intervalo $[e^{-n}, e^{n}]$.

Evidentemente $f_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+)$ y $\mathrm{Sop}(f_n) = [e^{-n}, e^{n}]$.

Sean k, h enteros no negativos, $\varepsilon > 0$. Sabemos que existe un número positivo δ tal que:

$$t^{k+r} |\ln t|^{h} |f^{(k)}(t)| \leq \varepsilon \quad \text{si} \quad 0 < t < \delta \quad o \text{ bien si} \quad t > 1/\delta. \qquad [153]$$

Por otra parte, $\xi(0) = 1$, de modo que existe un número positivo τ tal que:

$$|1 - \xi(x)| \leq \varepsilon \qquad \text{si} \qquad |x| \leq \tau. \qquad [154]$$

Sea $n_o = 1 + [1/\tau \ln 1/\delta]$, donde los corchetes indican la función parte entera. Consideremos $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_o$; podemos escribir:

$$f_n(t) - f(t) = f(t) \left[\xi\left(\frac{\ln t}{n} \right) \chi_{[e^{-n},\, e^{n}]}(t) - 1 \right] \quad (t \in \mathbb{R}^+). \qquad [155]$$

Podemos suponer que $\tau < 1$, de modo que $n > \ln 1/\delta$.

Si consideramos $e^{-n} < t < e^{n}$ tenemos:

$$\frac{d^k}{dt^k} [f_n(t) - f(t)] = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} f^{(k-p)}(t) \frac{d^p}{dt^p} \left[\xi\left(\frac{\ln t}{n} \right) - 1 \right]$$

$$= \sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} f^{(k-p)}(t)\, t^{-p} \sum_{q=1}^{p} a_q^p\, n^{-q}\, \xi^{(q)}\left(\frac{\ln t}{n} \right) +$$

$$+ f^{(k)}(t) \left[\xi\left(\frac{\ln t}{n} \right) - 1 \right] \qquad [156]$$

donde las constantes a_q^p's son enteras y solo dependientes de ξ.

Escribimos ahora:

$$t^{k+r} \, |\ln t|^h \left| \frac{d^k}{dt^k} [f_n(t) - f(t)] \right| \le$$

[157]
$$\le \sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} |f^{(k-p)}(t)| \; t^{k-p+r} \; |\ln t|^h \sum_{q=1}^{p} |a_q^p| \; n^{-q} \; \| \xi^{(q)} \|_\infty +$$

$$+ \; t^{k+r} \; |\ln t|^h \; |f^{(k)}(t)| \; \left| \xi\left(\frac{\ln t}{n} \right) - 1 \right|$$

donde hemos indicado:

[158]
$$\| \xi^{(q)} \|_\infty = \sup_{t>0} | \xi^{(q)}(t) | \qquad (0 \le q \le p).$$

Por lo tanto:

$$t^{k+r} \, |\ln t|^h \left| \frac{d^k}{dt^k} [f_n(t) - f(t)] \right| \le$$

[159]
$$\le \sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} \gamma_{k-p,h}^{[r]}(f) \sum_{q=1}^{p} |a_q^p| \; n^{-q} \; \| \xi^{(q)} \|_\infty +$$

$$+ \; t^{k+r} \; |\ln t|^h \; |f^{(k)}(t)| \; \left| \xi\left(\frac{\ln t}{n} \right) - 1 \right|$$

Ahora, si $e^{-n} < t < \delta$ o bien si $1/\delta < t < e^{n}$, por [153] sigue:

$$t^{k+r} \, |\ln t|^h \left| \frac{d^k}{dt^k} [f_n(t) - f(t)] \right| \le$$

[160]
$$\le \sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} \gamma_{k-p,h}^{[r]}(f) \sum_{q=1}^{p} |a_q^p| \; n^{-q} \; \| \xi^{(q)} \|_\infty + \varepsilon \; (1 + \| \xi \|_\infty)$$

Por otra parte, si $\delta \le t \le 1/\delta$ entonces $e^{-n\tau} \le t \le e^{n\tau}$, y por [154] y [159] resulta:

$$t^{k+r} \, |\ln t|^h \left| \frac{d^k}{dt^k} [f_n(t) - f(t)] \right| \le$$

[161]
$$\le \sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} \gamma_{k-p,h}^{[r]}(f) \sum_{q=1}^{p} |a_q^p| \; n^{-q} \; \| \xi^{(q)} \|_\infty + \varepsilon \; \gamma_{k,h}^{[r]}(f).$$

De [160] y [161] deducimos:

$$\overline{\lim_{n \longrightarrow +\infty}} \text{ SUP } \left\{ t^{k+\mathfrak{r}} \, |\ln t|^h \left| \frac{d^k}{dt^k} [f_n(t) - f(t)] \right| : e^{-n} < t < e^n \right\} \leq$$

[162]

$$\leq \varepsilon \text{ MAX } \left\{ 1 + \|\, \xi \,\|_\infty, \gamma_{k,h}^{[\mathfrak{r}]}(f) \right\}.$$

Además, sobre $(0, e^{-n}] \cup [e^n, +\infty)$ resulta $f_n \equiv 0$, y por [159]:

[163] $$\text{SUP } \left\{ t^{k+\mathfrak{r}} \, |\ln t|^h \, |f^{(k)}(t)| : t \in (0, e^{-n}] \cup [e^n, +\infty) \right\} \leq \varepsilon.$$

Queda así probado que $\gamma_{k,h}^{[\mathfrak{r}]}(f_n - f) \longrightarrow 0$ $(n \longrightarrow +\infty)$; como k, h son enteros no negativos arbitrarios, sigue la tesis ■

Nota [II.2.2]

Dada $f \in \mathfrak{M}_\mathfrak{r}$, quedan inducidas las aplicaciones:

[164] $$\begin{cases} x \xrightarrow{\mathbb{M}^{\mathfrak{r}} f} e^{-\mathfrak{r}x} f(e^{-x}) \\ y \xrightarrow{\mathbb{M}_{\mathfrak{r}} f} \mathbb{M}[f](\mathfrak{r} + iy) \end{cases}$$

definidas para $x, y \in \mathbb{R}$. Sabemos que $f \longrightarrow \mathbb{M}^{\mathfrak{r}} f$ es una correspondencia entre $\mathfrak{M}_\mathfrak{r}$ y el espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Dado $y \in \mathbb{R}$ tenemos:

$$\int_0^{+\infty} |t^{\mathfrak{r}+iy-1} f(t)| \, dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} t^{\mathfrak{r}-1} |f(t)| \, dt$$

[165]

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-x\mathfrak{r}} |f(e^{-x})| \, dx < +\infty,$$

y así $\mathbb{M}_\mathfrak{r}$ está bien definida. En particular, es inmediata la identidad:

[166] $$\mathbb{M}_{\mathfrak{r}}[f](y) = \mathbb{F}[\mathbb{M}^{\mathfrak{r}} f](y / 2\pi)$$

de manera que $\mathfrak{M}_\mathfrak{r} \xrightarrow{\mathbb{M}_{\mathfrak{r}}} \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Proposición [II.2.3]

Dadas $f \in \mathfrak{M}_r$, $g \in \mathfrak{M}_r$, escribiremos:

$$(f \,\square\, g)(t) = \int_0^{+\infty} f(s)\, g\left(\frac{t}{s}\right) \frac{ds}{s} \qquad (t > 0).$$

Entonces:

(i) $f \,\square\, g$ está bien definida.

(ii) $f \,\square\, g \in \mathfrak{M}_r$.

(iii) $(\mathfrak{M}_r, \square)$ es un álgebra conmutativa sobre el cuerpo $\mathbb{C}$.

(iv) $\mathbb{M}^r$ es un homomorfismo de álgebras entre $(\mathfrak{M}_r, \square)$ y $(S(\mathbb{R}), *)$, donde el asterisco representa el proceso de convolución usual.

(v) $\mathbb{M}_r$ es un homomorfismo de álgebras entre $(\mathfrak{M}_r, \square)$ y $(S(\mathbb{R}), \circ)$, donde $\circ$ representa la multiplicación corriente punto a punto.

Demostración:

(i) Dado $t > 0$ tenemos:

[167] $$(f \,\square\, g)(t) = t^{-r}\, (\mathbb{M}^r f * \mathbb{M}^r g)(-\ln t).$$

(ii) Por [167] resulta:

$$(f \,\square\, g)'(t) =$$

$$= -\, t^{-r-1} \int_{\mathbb{R}} f_o(x) \left[\, r\, g_o(-\ln t - x) + g_o'(-\ln t - x) \,\right] dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{x} f(e^{-x})\, g'(t\, e^{x})\, dx$$

[168] $$= \int_0^{+\infty} f(s)\, g'\left(\frac{t}{s}\right) \frac{ds}{s^2}.$$

En forma inductiva sigue entonces:

[169] $$(f \,\square\, g)^{(n)}(t) = \int_0^{+\infty} f(s)\, g^{(n)}\left(\frac{t}{s}\right) \frac{ds}{s^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Sean $k,\ h \in \mathbb{N}_0$. Ahora:

$(\ln t)^h\ t^{k+\mathfrak{r}}\ (f \,\square\, g)^{(k)}(t) =$

[170]

$$= \sum_{p=0}^{h} \binom{h}{p} \int_0^{+\infty} f(s)\, s^{\mathfrak{r}-1}\, (\ln s)^p \left(\frac{t}{s}\right)^{k+\mathfrak{r}} g^{(k)}\left(\frac{t}{s}\right) \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{h-p} ds$$

Si escribimos, para $s > 0$, $t > 0$, $0 \le p \le h$,

[171] $$\mathfrak{Q}_p^h(s,\ t) = f(s)\, s^{\mathfrak{r}-1}\, (\ln s)^p \left(\frac{t}{s}\right)^{k+\mathfrak{r}} g^{(k)}\left(\frac{t}{s}\right) \left(\ln \frac{t}{s}\right)^{h-p}$$

tenemos:

[172] $$\begin{cases} \mathfrak{Q}_p^h(s,\ t) \longrightarrow 0 \quad (t \longrightarrow 0 \ \text{ o } \ t \longrightarrow +\infty) \\ |\mathfrak{Q}_p^h(s,\ t)| \le s^{\mathfrak{r}-1}\, |f(s)\,(\ln s)^p|\ \gamma_{k,h-p}^{[\mathfrak{r}]}(g) \qquad (s > 0,\ t > 0) \end{cases}$$

y, además:

[173] $$\int_0^{+\infty} s^{\mathfrak{r}-1}\, |f(s)\,(\ln s)^p|\, ds = \int_{\mathbb{R}} |x|^p\ |\mathbb{M}^{\mathfrak{r}} f(x)|\ dx < +\infty.$$

Finalmente, por [171]:

[174] $$|(\ln t)^h\ t^{k+\mathfrak{r}}\ (f \,\square\, g)^{(k)}(t)| \le \sum_{p=0}^{h} \binom{h}{p} \int_0^{+\infty} |\mathfrak{Q}_p^h(s,\ t)|\ ds$$

y, aplicando el teorema de la convergencia mayorada de Lebesgue, sigue

$$|(\ln t)^h\ t^{k+\mathfrak{r}}\ (f \,\square\, g)^{(k)}(t)| \longrightarrow 0 \quad (t \longrightarrow 0 \ \text{ o } \ t \longrightarrow +\infty)$$

con lo cual queda establecido (ii).

El punto (iii) se puede establecer fácilmente; (iv) sigue haciendo $t = e^{-x}$ en [167]. Si ahora $f,\ g \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}$, $y \in \mathbb{R}$ hacemos:

$\mathbb{M}_{\mathfrak{r}}[f \,\square\, g](y) = \mathbb{F}[\mathbb{M}^{\mathfrak{r}}(f \,\square\, g)](y\ /\ 2\pi)$

(por [166])

$$= \mathbb{F}[\mathbb{M}^{r} f * \mathbb{M}^{r} g](y / 2\pi)$$

(por (iv))

$$= \mathbb{F}[\mathbb{M}^{r} f](y / 2\pi)\ \mathbb{F}[\mathbb{M}^{r} g](y / 2\pi)$$

(por [166])

$$= (\mathbb{M}_{r} f \circ \mathbb{M}_{r} g)(y)$$

quedando probado (v) ∎

<u>Proposición [II.2.4]</u>

La aplicación $\mathbb{M}_{r}$ antes definida es un homeomorfismo entre $\mathfrak{M}_{r}$ y $S(\mathbb{R})$

<u>Demostración:</u>

Dada $\varphi \in S(\mathbb{R})$, definimos:

$$\varphi^{\sim}(t) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\ t^{-ix-r}\ dx \qquad (t > 0).$$

Notamos que:

[175] $$e^{-rx}\ \varphi^{\sim}(e^{-x}) = (2\pi)^{-1}\ \mathbb{F}[\varphi](-x/2\pi) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Luego $\varphi^{\sim}$ está bién definida y es indefinidamente derivable. Aplicando [II.1.6] tenemos que $\varphi^{\sim} \in \mathfrak{M}_{r}$; dado ahora $y \in \mathbb{R}$, usando [166]:

$$\mathbb{M}_{r}[\varphi^{\sim}](y) = \mathbb{F}[\ \mathbb{M}^{r} \varphi^{\sim}\ ](y / 2\pi)$$

$$= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{F}[\varphi] \left(-\ \frac{x}{2\pi}\right) e^{-ixy}\ dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{F}[\varphi](z)\ e^{2\pi izy}\ dz$$

[176] $$= \varphi(y)$$

Por otro lado, dada $f \in \mathbb{M}_{r}$, $\mathbb{M}_{r} f \in S(\mathbb{R})$ por [II.1.6] y tenemos:

$$(\mathbb{M}_{r} f)^{\sim}(t) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} (\mathbb{M}_{r} f)(x)\ t^{-ix-r}\ dx$$

$$= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{F}[\mathbb{M}^{r} f](x / 2\pi)\ t^{-ix-r}\ dx$$

$$= t^{-r} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{F}[\mathbb{M}^{r} f](y)\, e^{-2\pi i y \ln t}\, dy$$

$$= t^{-r}\, \mathbb{F}[\mathbb{F}[\mathbb{M}^{r} f]](\ln t)$$

$$= t^{-r}\, (\mathbb{M}^{r} f)(-\ln t)$$

[177]

$$= f(t).$$

De [176] y [177] sigue que la aplicación recíproca de $\mathbb{M}_{r}$ está dada por:

[178] $$(\mathbb{M}_{r})^{-1}\varphi(t) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, t^{-ix-r}\, dx \qquad (\varphi \in S(\mathbb{R}),\ t > 0).$$

Dada $\eta \in S(\mathbb{R})$, vamos a indicar:

[179] $$\sigma_{m}^{n}(\eta) = \mathrm{SUP} \left\{ |x^{m}\, \eta^{(n)}(x)| : \quad x \in \mathbb{R} \right\} \qquad (m,\ n \in \mathbb{N}_{o}).$$

Se sabe que la familia de seminormas $\{\sigma_{m}^{n}\}_{m,n}$ hace de $S(\mathbb{R})$ un espacio vectorial topológico localmente convexo.

Dada $g \in \mathfrak{M}_{r}$ y un entero no negativo m resulta $\sigma_{m}^{o}(\mathbb{M}^{r} g) = \gamma_{o,m}^{[r]}(g)$ y, si n es un entero, trabajando como en [II.1.6] tendremos:

[180] $$\sigma_{m}^{n}(\mathbb{M}^{r} g) \le |r|^{n}\, \gamma_{o,m}^{[r]}(g) + \sum_{q=1}^{n} |\mathfrak{N}_{q}^{n}|\, \gamma_{q,m}^{[r]}(g).$$

Por [166], [180] y la continuidad de la transformada de Fourier sobre el espacio de Schwartz sigue la continuidad de $\mathbb{M}_{r}$.

Usando ahora [175], si $\eta \in S(\mathbb{R})$, $t > 0$, resulta:

[181] $$(\mathbb{M}_{r})^{-1}\, \eta(t) = (2\pi)^{-1}\, t^{-r}\, \mathbb{F}[\eta] \left(\frac{\ln t}{2\pi} \right).$$

Formalmente, esta última expresión es análoga a [129]; dados k, h enteros no negativos, $t > 0$, escribamos:

$$\left| (\ln t)^h t^{r+k} \frac{d^k}{dt^k} [(\mathbb{M}_r)^{-1}\eta](t) \right| =$$

$$= \left| (2\pi)^{-1} \sum_{q=0}^{k} (-2\pi i)^q \mathfrak{I}_q^k (\ln t)^h \mathbb{F}[x^q \eta(x)] \left(\frac{\ln t}{2\pi} \right) \right|$$

[182]
$$\leq \sum_{q=0}^{k} |\mathfrak{I}_q^k| (2\pi)^{q+h-1} \sigma_h^o(\mathbb{F}[x^q \eta(x)])$$

donde hemos empleado el método y la notación usada en [II.1.6].

Por lo tanto:

[183]
$$\gamma_{k,h}^{[r]}((\mathfrak{M}_r)^{-1}\eta) \leq \sum_{q=0}^{k} |\mathfrak{I}_q^k| (2\pi)^{q+h-1} \sigma_h^o(\mathbb{F}[x^q \eta(x)])$$

y nuevamente, puesto que la transformada de Fourier es un homeomorfismo sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sigue la continuidad de $(\mathbb{M}_r)^{-1}$ ∎

§3 Algunas construcciones sobre $\mathfrak{M}_r$

Haremos a continuación uso de los resultados obtenidos en esta segunda parte, para construir nuevos ejemplos de elementos de $\mathfrak{M}_r$.

Proposición [II.3.1]

Dado $a \in \mathbb{R}$ t.q. $|a| < \pi$, resulta:

[184]
$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{a}{2} = \int_0^\infty \frac{\operatorname{Sh}(ax)}{\operatorname{Sh}(\pi x)} dx.$$

Demostración:

Consideremos, dado $R > 0$, el recinto limitado por la curva cerrada, que se obtiene al recorrer (en sentido antihorario) los segmentos:

$$[R^{-1}, R], \quad [R, R + i], \quad [R + i, R^{-1} + i],$$

luego el arco de centro i y radio R^{-1} entre $R^{-1} + i$ y $-R^{-1} + i$, los segmentos $[-R^{-1} + i, -R + i]$, $[-R + i, -R]$, $[-R, -R^{-1}]$ y, finalmente, el arco de centro 0 y radio R^{-1} entre $-R^{-1}$ y R^{-1}. Indicaremos esta curva mediante γ_R.

Consideremos la función de la variable compleja z

[185]
$$F(z) = \frac{e^{az}}{Sh(\pi z)}.$$

En particular, F(z) posee polos simples en los puntos $z_k = ik$, donde k es cualquier número entero, y además

[186]
$$\mathrm{RES}\ \{\ F(z);\ z = 0\ \} = \pi^{-1}, \qquad \mathrm{RES}\ \{\ F(z);\ z = i\ \} = -\pi^{-1}\ e^{ia}.$$

Por otra parte

[187]
$$F(x + i) = -e^{ia}\ F(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

y, dado un número real ρ se tiene

[188]
$$\left| \int_0^1 F(\rho + it)\ dt \right| \leq \frac{e^{a\rho}}{|Sh(\pi\rho)|}$$

de donde se tiene

[189]
$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left| \int_0^1 F(\rho + it)\ dt \right| = 0.$$

Escribimos entonces:

[190]
$$2\pi i\ [\mathrm{RES}\ \{\ F(z);\ z = 0\ \} + \mathrm{RES}\ \{\ F(z);\ z = i\ \}] = \int_{\gamma_R} F(z)\ dz$$

i.e. $2i\ (1 - e^{ia}) =$

[191]
$$= \left[\int_{R^{-1}}^{R} + \int_{R}^{R+i} + \int_{R+i}^{R^{-1}+i} + \int_{\gamma_R^1} + \int_{-R^{-1}+i}^{-R+i} + \int_{-R+i}^{-R} + \int_{-R}^{-R^{-1}} + \int_{\gamma_R^2} \right] F(z)dz$$

donde γ_R^1, γ_R^2 son los arcos de centro i, 0 y radio R^{-1} de γ_R, respect..

Escribiendo

[192]
$$I_R = \int_{R^{-1} \leq |x| \leq R} F(x)\ dx$$

y, haciendo uso de [186], [189] y [191] podemos escribir:

[193]
$$i\ (1 - e^{ia}) = (1 + e^{ia})\ I_R + O(1).$$

Haciendo R $\longrightarrow +\infty$ en [193] tenemos:

[194] $$\mathrm{tg}\ \frac{a}{2} = \mathrm{VP} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ax}}{\mathrm{Sh}(\pi x)}\, dx$$

y, de la identidad anterior, se deduce enseguida la tesis ∎

<u>Proposición [II.3.2]</u>

Dado $\mathfrak{r} \in \mathbb{R}$, consideremos la función definida por:

$$f(t) = t^{-\mathfrak{r}} \ \ln t \ \mathrm{Cosech}(\ln t) \qquad (t > 0).$$

En particular, en [II.1.7](d) hemos probado que $f \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}$.

Entonces, dado $x \in \mathbb{R}$,

[195] $$\mathbb{M}_{\mathfrak{r}}[t^{-\mathfrak{r}} \ \ln t \ \mathrm{Cosech}(\ln t)](x) = \frac{\pi^2}{2}\ \mathrm{Ch}^{-2}\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

<u>Demostración:</u>

Derivando formalmente en [184] obtenemos:

[196] $$\frac{1}{4\cos^2 \frac{a}{2}} = \frac{d}{da}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{Sh}(at)}{\mathrm{Sh}(\pi t)}\, dt$$
$$= \int_0^{\infty} \frac{t\ \mathrm{Ch}(at)}{\mathrm{Sh}(\pi t)}\, dt \qquad (|a| < \pi).$$

Justificaremos la operación anterior en dos etapas:

I) Dado un no. a real t.q. $|a| < \pi$, $t \longrightarrow \dfrac{\mathrm{Sh}(at)}{\mathrm{Sh}(\pi t)} \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^+)$.

II) Dado un no. a real t.q. $|a| < \pi$, $t \longrightarrow \dfrac{t\ \mathrm{Ch}(at)}{\mathrm{Sh}(\pi t)} \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^+)$.

Notemos que:

[197] $$\left|\frac{\mathrm{Sh}(at)}{\mathrm{Sh}(\pi t)}\right| = \mathrm{sg}(a)\ \frac{1 - e^{-2at}}{e^{(\pi-a)t} - e^{-(\pi+a)t}}$$

(convenimos que sg(0) = 0). Por [197] resulta, para valores lo suficientemente grandes de t, que:

[198]
$$\left|\frac{Sh(at)}{Sh(\pi t)}\right| \leq \frac{3}{2}\ \exp[\ -(\pi - |a|)t\ ]$$

y, como la aplicación $t \longrightarrow Sh(at)\ Cosech(\pi t)$ es continua (notar que converge a a/π cuando $t \longrightarrow 0^+$), sigue I). Como la aplicación que resulta en II) es temperada y, puesto que el coseno hiperbólico es una función par, consideraremos $0 < a < \pi$.

Dado un no. p t.q. $0 < p < a < a + p < \pi$, la relación

[199]
$$\frac{t\ Ch(at)}{Sh(\pi t)} \leq e^{-pt}$$

resulta válida para valores lo suficientemente grandes de t. Por otra parte $t\ Ch(at)\ Cosech(\pi t) \longrightarrow 1/\pi$ ($t \longrightarrow 0+$) y así sigue II). Además dado un no. positivo t, la función $a \longrightarrow Sh(at)\ Cosech(\pi t)$ es indefinidamente derivable sobre $(-\pi, \pi)$ resultando entonces válida la expresión [196]. Ahora, la función $z \longrightarrow 1/4\ \sec^2(z/2)$ es analítica sobre el disco abierto de centro en cero y radio π; aplicando el princípio de prolongación analítica podemos escribir:

[200]
$$\frac{1}{4\cos^2\frac{z}{2}} = \int_0^\infty \frac{t\ Ch(zt)}{Sh(\pi t)}\ dt \qquad (|z| < \pi).$$

Dado entonces un no. real a t.q. $|a| < \pi$, reemplazamos z por ia en [200] y obtenemos:

$$\frac{1}{4\ Ch^2\frac{a}{2}} = \int_0^\infty \frac{t\cos(at)}{Sh(\pi t)}\ dt$$

[201]
$$= \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{s\cos(a\pi^{-1}s)}{Shs}\ ds.$$

Tambien podemos escribir esta última relación en la forma:

[202] $$\mathbb{F}[\text{s Cosechs}]\left(\frac{a}{2\pi^2}\right) = \frac{\pi^2}{2}\ \text{Sech}^2\frac{a}{2}$$

donde, como hemos hecho hasta ahora, con $\mathbb{F}$ indicamos la transformada de Fourier. Por lo tanto:

[203] $$\begin{aligned} \mathbb{M}_{\mathfrak{r}}[f](x) &= \mathbb{F}[\text{s Cosechs}](x / 2\pi) \\ &= \frac{\pi^2}{2}\ \text{Ch}^{-2}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \end{aligned}$$ ∎

Corolario [II.3.3]

La aplicación

[204] $$g(t) = t^{-\mathfrak{r}}\ (t + t^{-1})^{-2} \qquad (t > 0),$$

pertenece a $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}$.

Demostración:

Por la proposición anterior, la aplicación $x \longrightarrow \text{Sech}^2 x$ resulta temperada y

$$e^{-rx}\ g(e^{-x}) = 1/4\ \text{Sech}^2 x$$ ∎

Ejemplo [II.3.4]

Como en [II.1.7](b), con $-\mathfrak{R}(\lambda) < \mathfrak{r} < -\mathfrak{R}(\lambda + \mu)$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_{\mathfrak{r}}[t^{\lambda}\ (1+t)^{\mu}](x) &= \mathbb{M}[t^{\lambda}\ (1+t)^{\mu}](\mathfrak{r} + ix) \\ &= \int_0^{\infty} t^{\lambda+\mathfrak{r}+ix-1}\ (1+t)^{\mu}\ dt \\ &= \text{Be}(\lambda + \mathfrak{r} + ix,\ -\lambda - \mathfrak{r} - \mu). \end{aligned}$$

Haciendo uso de [II.1.6] y que $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}} \xrightarrow{\mathbb{M}_{\mathfrak{r}}} S(\mathbb{R})$, de la relación [205] se deduce que la función

[205] $$f(t) = t^{-\mathfrak{r}}\ \frac{\Gamma(\zeta - i\ \ln t)}{\Gamma(\xi - i\ \ln t)} \qquad (t > 0),$$

$(\zeta,\ \xi \in \mathbb{C}^+$ fijos, $\mathfrak{R}(\zeta) < \mathfrak{R}(\xi))$ pertenece al espacio $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}$.

Ejemplo [II.3.5]

Asimismo, considerando $f(t) = \ln(1+t)$ (t positivo), sabemos que que $f \in \mathfrak{M}_{\mathbf{r}}$ sii $-1 < \mathbf{r} < 0$. En este caso,

[206] $$\mathbb{M}_{\mathbf{r}}[f](x) = \int_0^{\infty} t^{\mathbf{r}+ix-1} \ln(1+t)\, dt.$$

La integral anterior es convergente ya que si $0 < \delta < -\mathbf{r}$ existe un número positivo T tal que $t^{-\delta} \log(1+t) < 1$ si $t > T$, de modo que

$$\int_T^{+\infty} t^{\mathbf{r}-1} \ln(1+t)\, dt \le \int_T^{+\infty} t^{\mathbf{r}-1}\, dt$$

y la última integral es finita pues $\mathbf{r}$ es negativo. Por otra parte

$$\int_0^{e^2-1} t^{\mathbf{r}-1} \ln(1+t)\, dt \le \int_0^{e^2-1} t^{\mathbf{r}}\, dt$$

y también la integral de la derecha es finita pues $\mathbf{r} > -1$.

Para evaluar [206] escribiremos $F(z) = z^{\mathbf{r}+ix}(1+z)^{-1}$, z complejo, haciendo uso de la determinación del logaritmo para la cual $0 \le \arg(z) < 2\pi$. Se integrará la función $F(z)$ sobre la curva $C_{\delta,R,\varepsilon}$ (recorrida en sentido antihorario), con $0 < \delta < R$, $\varepsilon > 0$, que consiste en los segmentos $[\delta\, e^{i\varepsilon}, R\, e^{i\varepsilon}]$, $[R\, e^{i(2\pi-\varepsilon)}, \delta\, e^{i(2\pi-\varepsilon)}]$ y de los arcos $|z| = R$ que une los puntos $R\, e^{i\varepsilon}$ y $R\, e^{i(2\pi-\varepsilon)}$, pasando por $-R$, y $|z| = \delta$, que une los puntos $\delta\, e^{i(2\pi-\varepsilon)}$ y $\delta\, e^{i\varepsilon}$, pasando por $-\delta$.

En particular,

[207] $$\mathrm{RES}\{\, F(z);\ z = -1\} = e^{\pi(-x+i\mathbf{r})}$$

de modo que

[208] $$\int_{C_{\delta,R,\varepsilon}} F(z)\, dz = 2\pi i\, e^{\pi(-x+i\mathbf{r})}.$$

Por otra parte tenemos:

$$\int_{C_{\delta,R,\varepsilon}} F(z)\, dz =$$

$$= e^{\varepsilon(-x+i(\mathfrak{r}+1))} \int_{\delta}^{R} \frac{t^{\mathfrak{r}+ix}}{1 + t\, e^{i\varepsilon}}\, dt + \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} F(R\, e^{i\varphi})\, R\, i\, e^{i\varphi}\, d\varphi$$

[209]

$$- \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} F(\delta\, e^{i\varphi})\, \delta\, i\, e^{i\varphi}\, d\varphi - e^{(2\pi-\varepsilon)(-x+i\mathfrak{r})} \int_{\delta}^{R} \frac{t^{\mathfrak{r}+ix}}{1 + t\, e^{i(2\pi-\varepsilon)}}\, dt.$$

Si $\rho > 0$, obtenemos:

$$\left| \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon} F(\rho\, e^{i\varphi})\, \rho\, i\, e^{i\varphi}\, d\varphi \right| \le 2\, C\, (\pi - \varepsilon)\, \rho^{\mathfrak{r}+1}\, |1 - \rho|^{-1}$$

donde C es una constante positiva que depende de x; de la última relación, los sumandos 2do. y 3ero. en [209] convergerán a cero al hacer $R \longrightarrow +\infty$ y $\delta \longrightarrow 0^+$ respectivamente. Haciendo además $\varepsilon \longrightarrow 0^+$ de [208] y [209] se obtiene

[210] $$\int_{0}^{+\infty} \frac{t^{\mathfrak{r}+ix}}{1 + t}\, dt = i\pi\, \mathrm{Cosech}[\pi(x - i\mathfrak{r})].$$

Ahora por [206] y [210] resulta

[211] $$\mathbb{M}_{\mathfrak{r}}[f](x) = -\,\pi\, \frac{\mathrm{Cosech}[\pi(x - i\mathfrak{r})]}{x - i\mathfrak{r}}.$$

Como antes, haciendo

[212] $$g(t) = t^{-\mathfrak{r}}\, \frac{\mathrm{Cosech}[\pi(\ln t + i\theta)]}{\ln t + i\theta} \quad (t > 0)$$

donde $-1 < \theta < 0$ es fijo, se obtiene un elemento de $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}$.

Proposición [II.3.6]

Dado $\mathfrak{r} \in \mathbb{R}$ escribimos:

[213] $$h(t) = t^{-\mathfrak{r}}\, e^{-(\ln t)^2} \qquad (t > 0).$$

En particular, por [II.1.7](a), $h \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}$; dado $n \in \mathbb{N}$ hacemos tambien:

[214]
$$h^{[n]} = \underbrace{h \,\square\, h \,\square\, \dots \,\square\, h}_{n\text{ - veces}} \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}.$$

Entonces:

a) $h^{[n]}(t) = n^{-1/2}\, \pi^{n/2-1}\, t^{-r-(n\pi)^{-1}\ln t} \qquad (t > 0).$

b) $2^{-1/2}\, t^{(1-1/2\pi)\ln t} = \displaystyle\int_0^{\infty} u^{\ln(t^2 u^{-2})-1}\, du \qquad (t > 0).$

<u>**Demostración:**</u>

a) Dado $x \in \mathbb{R}$, escribimos:

[215]
$$\begin{aligned} \mathbb{M}_{\mathfrak{r}}[h](x) &= \mathbb{F}[e^{-u^2}]\,(x / (2\pi)) \\ &= \pi^{1/2} \exp\,(-\pi\, x^2 / 4). \end{aligned}$$

Por otra parte:

[216]
$$\begin{aligned} \mathbb{M}_{\mathfrak{r}}[h^{[n]}](x) &= (\mathbb{M}_{\mathfrak{r}}[h](x))^n \\ &= \pi^{n/2} \exp(-\, n\, \pi\, x^2 / 4). \end{aligned}$$

Esta última expresión la indicaremos como $H_n(x)$. Entonces:

[217]
$$\begin{aligned} h^{[n]}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} H_n(x)\, t^{-\mathfrak{r}-ix}\, dx \\ &= \frac{\pi^{n/2-1}}{2} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\, n\, \frac{\pi}{4} x^2\right) t^{-\mathfrak{r}-ix}\, dx \\ &= \frac{\pi^{n/2-1}\, t^{-\mathfrak{r}}}{2}\, \mathbb{F}\left[\exp\left(-\, n\, \frac{\pi}{4} x^2\right)\right]\left(\frac{\ln t}{2\pi}\right) \\ &= n^{-1/2}\, \pi^{n/2-1}\, t^{-\mathfrak{r}} \exp(-\,(n\pi)^{-1}\,(\ln t)^2) \end{aligned}$$

lo que da la parte a).

b) Es consecuencia de la identidad:

[218] $$h^{[2]}(t) = h(t) \int_0^{+\infty} u^{\ln(t^2 u^{-2})-1}\, du$$

y del punto a).

§4 Sobre los espacios de McBride vs. los espacios $\mathfrak{M}_r$.

En este punto, siguiendo la nomenclatura de A. C. McBride [McB2] se indicará $\mathbb{L}^p_\mu(\mathbb{R}^+)$, para $\mu \in \mathbb{C}$, $1 \leq p < \infty$ a los conjuntos:

$$\left\{ f\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C} \text{ , } f \text{ - medible Lebesgue } / \int_0^{+\infty} |t^{-\mu} f(t)|^p \frac{dt}{t} < +\infty \right\}$$

y escribiremos, para $f \in \mathbb{L}^p_\mu(\mathbb{R}^+)$:

$$\|\, f \,\|_{p,\mu} = \left(\int_0^{+\infty} |t^{-\mu} f(t)|^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p}.$$

Asimismo haremos:

$$\mathbb{L}^\infty_\mu(\mathbb{R}^+) = \left\{ f\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C} \text{ , } f \text{ - medible Lebesgue } / \ t^{-\mu} f(t) \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^+) \right\}$$

y también:

$$\|\, f \,\|_{\infty,\mu} = \|\, t^{-\mu} f(t) \,\|_\infty.$$

Resulta entonces:

[219] $$\mathfrak{M}_r \subseteq \mathbb{L}^p_{-r}(\mathbb{R}^+) \qquad \text{si} \qquad 1 \leq p \leq \infty,\ r \in \mathbb{R}.$$

Los espacios de McBride se defínen mediante:

$$F_{p,\mu} = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^+)\colon t^k f^{(k)}(t) \in \mathbb{L}^p_\mu(\mathbb{R}^+),\ k = 0, 1, \ldots \right\}$$

cuando $1 \leq p < \infty$, y en particular:

$$F_{\infty,\mu} = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^+)\colon t^k \frac{d^k}{dt^k}[t^{-\mu} f(t)] \underset{(\ t \longrightarrow 0+ \ \text{ó} \ t \longrightarrow +\infty\ )}{\longrightarrow} 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots) \right\}.$$

Dada $f \in F_{p,\mu}$, la familia de seminormas

$$\gamma^{p,\mu}_k(f) = \|\, t^k f^{(k)}(t) \,\|_{p,\mu}$$

induce sobre $F_{p,\mu}$ una estructura de espacio de Fréchet.

Proposición [II.4.1]

Dado $r \in \mathbb{R}$:

$$\mathfrak{M}_r \subseteq F_{p,-r} \quad (1 \le p \le \infty).$$

Demostración:

Supongamos en primer lugar que p es finito.

Dada $f \in \mathfrak{M}_r$ y k un entero no negativo, resulta:

[220] $$f^{(k)} \in \mathfrak{M}_{r+k} \qquad y \qquad t^k f^{(k)} \in \mathfrak{M}_r$$

de modo que, por [219], tenemos $f \in F_{p,-r}$.

Si $p = \infty$ escribimos:

[221] $$t^k \frac{d^k}{dt^k} [t^r f(t)] = \sum_{h=o}^{k} \binom{k}{h} (-1)^{k-h} (-r)_{k-h} t^{r+h} f^{(h)}(t)$$

de donde sigue que

$$t^k \frac{d^k}{dt^k} [t^r f(t)] \longrightarrow 0 \qquad (t \longrightarrow 0+ \quad ó \quad t \longrightarrow +\infty)$$

y, por lo tanto, $f \in F_{\infty,-r}$ ∎

Observación [II.4.2]

En general, dado $r \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{M}_r$ es un subespacio propio de $F_{p,-r}$ ($1 \le p$, p - finito).

Consideremos, por ejemplo, la función $f(t) = t^{-r} (1 + (\ln t)^2)^{-1}$, de la variable $t > 0$; $f \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ y $f \notin \mathfrak{M}_r$ como sigue de [II.1.6].

Vamos a indicar $g(t) = (1 + (\ln t)^2)^{-1}$ $(t > 0)$.

Se probará que para cada entero no negativo j existe un polinomio no nulo $P_j \in \mathbb{R}[x]$ t.q.

[222] $$g^{(j)}(t) = t^{-j} P_j(\ln t) (1 + (\ln t)^2)^{-j-1} \quad (t > 0),$$

donde $P_o(x) \equiv 1$ y $gr(P_j) \le 2j - 1$ si $j \ge 1$.

En particular, $g^{(1)}(t) = -2 \ln t \; t^{-1} (1 + (\ln t)^2)^{-2}$, $P_1(x) = -2x$.

Además de [222] tenemos

$$g^{(j+1)}(t) = t^{-j-1}\,(1 + (\ln t)^2)^{-j-2} \Big[(1 + (\ln t)^2)\, P_j^{(1)}(\ln t) + \tag{223}$$

$$+ \Big(-2\,(j + 1)\,\ln t - j\,(1 + (\ln t)^2) \Big)\, P_j(\ln t) \Big]$$

resultando así

$$P_{j+1}(x) = (1 + x^2)\, P_j^{(1)}(x) + \Big(-2\,(j + 1)\,x - j\,(1 + x^2) \Big)\, P_j(x) \tag{224}$$

lo que da inductivamente la representación buscada.

De la expresión [224] deducimos que $gr(P_{j+1}) \le gr(P_j) + 2$ y como en particular $gr(P_1) = 1$, tenemos $gr(P_j) \le 2j - 1$ si $j \ge 1$. Ahora dado un entero no negativo k escribimos

$$f^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{t^{-\tau-k+j}}{(1 - \tau)_{-k+j}}\, g^{(j)}(t)$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{t^{-\tau-k}}{(1 - \tau)_{-k+j}}\, P_j(\ln t)\,(1 + (\ln t)^2)^{-j-1}. \tag{225}$$

Por otra parte dado $j \in \mathbb{N}_0$ tenemos:

$$\int_0^{+\infty} |P_j(\ln t)\,(1 + (\ln t)^2)^{-j-1}|^p\, \frac{dt}{t} = \int_{\mathbb{R}} |P_j(x)\,(1 + x^2)^{-j-1}|^p\, dx. \tag{226}$$

Ya sea cuando $j = 0$, en cuyo caso $P_0(x) \equiv 1$ y resulta

$$\int_{\mathbb{R}} |P_0(x)\,(1 + x^2)^{-1}|^p\, dx \le \int_{\mathbb{R}} (1 + x^2)^{-1}\, dx < \infty,$$

o bien si $j \ge 1$, en cuyo caso $gr(P_j) \le 2j - 1$ y dado $M > 1$ podemos escribir:

$$\int_{|x| \ge M} |P_j(x)\,(1 + x^2)^{-j-1}|^p\, dx \le C / M^p \int_{\mathbb{R}} (1 + x^2)^{-p}\, dx$$

donde C es alguna constante positiva que depende de P_j, vemos en definitiva que las integrales en [226] siempre convergen. En consecuencia, usando [225] sigue que $f \in F_{p,-\tau}$.

Observación [II.4.3]

La observación [II.4.2] vale también si $p = \infty$. Esto es inmediato ya que la función $f(t) = t^{-r}\,(1 + (\ln t)^2)^{-1}$ $(t > 0)$, pertenece a $F_{\infty,-r}$.

Tenemos entonces que la inclusión

[227] $$\mathfrak{M}_r \subseteq \bigcap_{p\geq 1} F_{p,-r}$$

es estricta.

Proposición [II.4.4]

En general, el operador de derivación usual $D\colon \mathfrak{M}_r \longrightarrow \mathfrak{M}_{r+1}$ es continuo. Si r es negativo, dada $g \in \mathfrak{M}_{r+1}$ tal que el límite

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} \int_0^t g(\tau)\,d\tau$$

existe (ya sea finito o no), definimos:

$$(\tilde{D} g)(t) = \int_0^t g(\tau)\,d\tau.$$

Entonces $\tilde{D}$ es un operador recíproco (i.e. inverso) para D.

Demostración:

Dados $f \in \mathfrak{M}_r$, k, h enteros no negativos, se verifica la relación:

[228] $$\gamma^{[r+1]}_{k,h}(Df) = \gamma^{[r]}_{k+1,h}(f)$$

de donde sigue enseguida la continuidad de D. Por otra parte, $\tilde{D}$ está bien definido, ya que si $g \in \mathfrak{M}_{r+1}$ tenemos:

[229] $$\tau^{r+1}\,|g(\tau)| \longrightarrow 0 \qquad (\tau \longrightarrow 0+)$$

y existe $\xi > 0$ tal que:

[230] $$|g(\tau)| \leq \tau^{-r-1} \quad \text{si} \quad 0 < \tau < \xi.$$

Al ser $r < 0$, la relación [230] garantiza la convergencia de la integral que define a $\tilde{D} g$. En otro orden, tenemos:

[231] $$(\tilde{D} g)^{(k)} = g^{(k-1)}$$

si k es un entero positivo, y dado un entero $h \geq 0$ podemos escribir:

[232] $$t^{k+\mathfrak{r}} \; |\ln t|^{h} \; |(\tilde{D} g)^{(k)}(t)| = t^{(k-1)+(\mathfrak{r}+1)} \; |\ln t|^{h} \; |g^{(k-1)}(t)|$$

con lo cual resulta

[233] $$t^{k+\mathfrak{r}} \; |\ln t|^{h} \; |(\tilde{D} g)^{(k)}(t)| \longrightarrow 0 \quad (t \longrightarrow 0+ \quad ó \quad t \longrightarrow +\infty)$$

como asimismo

[234] $$\lim_{t \longrightarrow 0+|+\infty} t^{\mathfrak{r}} \; |\ln t|^{h} \; (\tilde{D} g)(t) = \lim_{t \longrightarrow 0+|+\infty} \frac{(\tilde{D} g)(t)}{t^{-\mathfrak{r}} \; |\ln t|^{-h}}.$$

Para $t \longrightarrow 0+$ o bien cuando $\underset{(t \longrightarrow +\infty)}{(\tilde{D} g)(t) \longrightarrow +\infty}$, la relación anterior resulta:

$$\lim_{t \longrightarrow 0+|+\infty} \frac{(\tilde{D} g)(t)}{t^{-\mathfrak{r}} \; |\ln t|^{-h}} = \lim_{t \longrightarrow 0+|+\infty} \frac{t^{\mathfrak{r}+1} \; |\ln t|^{h+1} \; g(t)}{h - \mathfrak{r} \; |\ln t|} = 0.$$

Por otra parte, si $\lim_{t \longrightarrow +\infty} (\tilde{D} g)(t)$ es finito la identidad anterior sigue enseguida de [234]. En definitiva, $\tilde{D} g \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}$. Es inmediato que:

[235] $$D(\tilde{D} g) = g.$$

Dada $f \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}$ notamos que $f(0+) = 0$. En efecto, en caso contrario podría determinarse $\lambda > 0$ y una sucesión $\langle t_j \rangle_{j \geq 1}$ de manera tal que

[236] $$\underset{(j \longrightarrow \infty)}{t_j \longrightarrow 0+} \qquad y \qquad |f(t_j)| \geq \lambda \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

En consecuencia:

[237] $$(t_j)^{\mathfrak{r}} \; |f(t_j)| \geq (t_j)^{\mathfrak{r}} \; \lambda \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

y como $\mathfrak{r}$ es negativo sigue que

[238] $$(t_j)^{\mathfrak{r}} \; |f(t_j)| \longrightarrow +\infty \quad (j \longrightarrow \infty)$$

lo cual contradice nuestra hipótesis original sobre f.

Por lo tanto tenemos:

[239] $$\tilde{D}(Df)(t) = \int_0^t f'(\tau) \, d\tau = f(t) \qquad \blacksquare$$

Observación [II.4.5]

En el §5 vamos a encuadrar el resultado anterior en un marco más general, en el que el operador $D^{\sim}$ se realizará, como operador de Riemann - Liouville de orden -1, en tanto operador contínuo sobre $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}$ para $\mathfrak{r} < 1$. Antes de dar fín al §4, dada $f \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}$, usando [164], la continuidad de $\mathbb{M}^{\mathfrak{r}+k}$ y [220] tenemos

[240] $$\gamma_k^{p,-\mathfrak{r}}(f) = \| \mathbb{M}^{\mathfrak{r}+k} f^{(k)} \|_p,$$

de modo que la inclusión $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}} \hookrightarrow F_{p,-\mathfrak{r}}$ resulta contínua.

§5 Hacia el Cálculo Integral Fraccionario sobre los espacios $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}$.

En este punto, nuestro objeto consiste en estudiar las posibles acciones, de algunos operadores íntegro - diferenciales del Cálculo Integral Fraccionario.

Observación [II.5.1]

De la consideración de [II.2.3] en los puntos (i), (ii), se deduce, de manera más general, que si $\mathfrak{r}$ es un número real y $S: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ es una aplicación medible t.q.

[241] $$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^n e^{-\mathfrak{r}x} |S(e^{-x})| < +\infty \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

entonces S indúce una funcional contínua $T_S: \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}} \longrightarrow \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}$, esto es, mediante la relación:

[242] $$T_S f(t) = \int_0^{+\infty} S(u)\, f\left(\frac{t}{u}\right) \frac{du}{u} \qquad (f \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}},\ t > 0).$$

En particular, p. ej., la aplicación $S: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por:

$$S(u) = \begin{cases} u^{1-\mathfrak{r}} & \text{si} \quad 0 < u \le 1 \\ u^{-1-\mathfrak{r}} & \text{si} \quad 1 < u \end{cases}$$

define un funcional contínuo sobre $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}$, aún cuando $S \notin \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}$.

Observación [II.5.2]

Antes de pasar a nuestro análisis, consideremos parte del estudio realizado por A. C. McBride [McB1] sobre automorfismos de $F_{p,\mu}$. A tal efecto consideremos los siguientes espacios (de McBride):

(i) Para $1 \leq p < \infty$

$$G_p = \left\{ f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^+): \ t^k f^{(k)}(t) \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^+), \ k = 0, 1, \dots \right\}$$

mientras que

$$G_{\infty} = \left\{ f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^+): \ t^k f^{(k)}(t) \underset{(t \longrightarrow 0+ \ \text{ó} \ t \longrightarrow +\infty)}{\longrightarrow} 0 \qquad (k = 0, 1, \dots) \right\}.$$

(ii) Si $1 \leq p \leq \infty$, $\mu \in \mathbb{C}$,

$$G_{p,\mu} = \left\{ f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^+): \ t^{-\mu} f(t) \in G_p \right\}.$$

(iii) Si k es un entero no negativo, se define $\gamma^k_{p,\mu}$ sobre $G_{p,\mu}$ por:

$$\gamma^k_{p,\mu}(f) = || \ t^k \ (t^{-\mu} f(t))^{(k)} \ ||_p.$$

Para cada k, $\gamma^k_{p,\mu}$ es una seminorma sobre $G_{p,\mu}$ y $\gamma^o_{p,\mu}$ es una norma, de modo que munido de la topología generada por $\{ \gamma^k_{p,\mu} \}^{\infty}_{k=o}$, $G_{p,\mu}$ deviene en un espacio de Fréchet.

Proposición. *"Sea p un número real, $1 \leq p \leq \infty$, $\mu \in \mathbb{C}$ y S una función definida a.e. sobre $\mathbb{R}^+$ tal que:*

[243] $$\int_0^{+\infty} s^{-\Re(\mu)-1} \ |S(s)| \ ds < +\infty.$$

Si T es una transformación integral del tipo:

[244] $$T\varphi(t) = \int_0^{+\infty} S\left(\frac{t}{s}\right) \varphi(s) \ \frac{ds}{s}$$

entonces T es un operador lineal continuo de $F_{p,\mu}$ en sí mismo".

La naturaleza de la condición [241] es muy distinta a la condición de McBride correspondiente, y la misma nos será de utilidad para analizar algunas transformaciones integrales clásicas.

En particular, la proposición anterior es consecuencia del siguiente

Lema. [McB1]

"Sea p un número real, $1 \le p < \infty$, K una función definida a.e. sobre $(0, +\infty)$ t.q.

[245]
$$\int_0^{+\infty} s^{-1/p' - \Re(\mu)} \, |K(s)| \, ds < +\infty.$$

Si T es una transformación integral, definida sobre una familia adecuada de funciones, del tipo:

[246]
$$T\varphi(t) = \int_0^{+\infty} K\left(\frac{t}{s}\right) \varphi(s) \, \frac{ds}{s}$$

entonces:

(i) T es una aplicación lineal contínua de $\mathbb{L}^p_{\mu-1/p}(\mathbb{R}^+)$ en sí mismo.

(ii) T es una aplicación lineal contínua de $G_{p,\mu}$ en sí mismo".

Demostración:

El punto (i) es un resultado conocido sobre convoluciones de Mellin (v. [R], lema 3.1); dada $\varphi \in \mathbb{L}^p_{\mu-1/p}(\mathbb{R}^+)$ también podemos escribir:

[247]
$$T\varphi(t) = t^{\Re(\mu)-1/p} \, (\tilde{K} * \tilde{\varphi}) \, (-\ln t) \qquad (t > 0).$$

donde $\tilde{K}(x) = e^{x(\Re(\mu)-1/p)} \, K(e^{-x})$, $\tilde{\varphi}(x) = e^{x(\Re(\mu)-1/p)} \, \varphi(e^{-x})$, $x \in \mathbb{R}$.

En particular, $\tilde{K} \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R})$, $\tilde{\varphi} \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R})$ y del teorema de Young deducimos que $T\varphi(t)$ es finito a.e., más aún

[248]
$$\begin{aligned} \| T\varphi \|_{p,\mu-1/p} &= \| \tilde{K} * \tilde{\varphi} \|_p \\ &\le \| \tilde{K} \|_1 \, \| \tilde{\varphi} \|_p \\ &= \| \varphi \|_{p,\mu-1/p} \int_0^{+\infty} s^{-1/p' - \Re(\mu)} \, |K(s)| \, ds. \end{aligned}$$

Con respecto al punto (ii), siguiendo la notación de A. McBride indicaremos $\delta = x\,D$, donde D es el operador de derivación usual. Entonces: (a) que δ es una aplicación lineal contínua de $G_{p,\mu}$ en sí mismo, tratándose de un homeomorfismo sii $\Re(\mu) \neq 1/p$; (b) el espacio $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^+)$ es denso en $G_{p,\mu}$ [ver McB1]. En consecuencia, resulta válida la identidad $\delta\, T = T\, \delta$, la cual puede establecerse, haciendo uso de [245] y [247], primero para funciones de $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^+)$, para extender luego la misma a $G_{p,\mu}$.

Con esta identidad, (ii) sigue de la manera natural corriente. ∎

Notemos que

[249]
$$F_{p,\mu} = G_{p,\mu+1/p}.$$

En efecto, sea $g \in G_{p,\mu+1/p}$. En particular, $t^{-\mu-1/p}\, g(t) \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^+)$, de donde $g \in \mathbb{L}^p_\mu(\mathbb{R}^+)$.

Supongamos que $t^j\, g^{(j)}(t) \in \mathbb{L}^p_\mu(\mathbb{R}^+)$, $0 \leq j \leq k$. Entonces:

[250]
$$t^{k+1}\, (t^{-\mu-1/p}\, g(t))^{(k+1)} = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} \frac{t^{-\mu+j-1/p}}{(1-\mu)_{-k-1+j}}\, g^{(j)}(t)$$

y como $t^{(k+1)}\, (t^{-\mu-1/p}\, g(t))^{(k+1)} \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^+)$, de la hipótesis inductiva obtenemos que $t^{k+1}\, g^{(k+1)}(t) \in \mathbb{L}^p_\mu(\mathbb{R}^+)$. Así $G_{p,\mu+1/p} \subseteq F_{p,\mu}$, y la otra inclusión sigue de manera análoga.

Con [249] y el lema de McBride tenemos entonces la proposición inicial.

<u>Nota [II.5.3]</u>

Vamos a presentar el listado de los operadores integrales que hemos de analizar; escribiremos algunas de las presentaciones alternativas que se dan en la literatura corriente, por lo cual es oportuno tener presente la función H - de Fox [F]; siguiendo a K. C. Gupta [G] y P. Skibinski [S] escribimos:

$$H^{m,n}_{p,q}\left[\begin{matrix}(a_1, \alpha_1), \ ... \ , (a_p, \alpha_p)\\ (b_1, \beta_1), \ ... \ , (b_q, \beta_q)\end{matrix}\ \middle|\ z\right] =$$

[251]

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j - s\,\beta_j)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1 - a_j + s\,\alpha_j)}{\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j - s\,\alpha_j)\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1 - b_j + s\,\beta_j)}\, z^s\, ds$$

donde $z \neq 0$, m, n, p, q son enteros t.q. $0 \leq m \leq q$, $0 \leq n \leq p$; un producto vacío debe interpretarse como 1; los parámetros a_j, b_j son complejos, mientras que los α's y β's son todos positivos y están constreñidos de manera tal que polos cualesquiera de productos diferentes del integrando [251] sean distintos; C es un contorno que, uniendo los puntos $-i\,\infty$ e $i\,\infty$, deja "a izquierda" todos los polos de las funciones $s \longrightarrow \Gamma(1 - a_j + s\,\alpha_j)$, $(1 \leq j \leq n)$, y "a derecha" los polos de las funciones $s \longrightarrow \Gamma(b_k - s\,\beta_k)$, $(1 \leq k \leq m)$. En particular, cuando $\alpha_i = 1$, $\beta_j = 1$, $i = 1, \ ... \ , p$, $j = 1, \ ... \ , q$ obtenemos la función G de Meijer [M], [E].

Nota [II.5.4]

Siguiendo a A. M. Mathai y R. K. Saxena [M - S2], considerando φ en una familia adecuada de aplicaciones escribiremos:

[252] Operadores de Riemann - Liouville

$$t^{\alpha}\, I^{0,\alpha}_{1;1}\,\varphi(t) = t^{\alpha-1}\int_0^t H^{1,0}_{1,1}\left[\begin{matrix}(\alpha, 1)\\ (0, 1)\end{matrix}\ \middle|\ \frac{t}{s}\right]\varphi(s)\, ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} \varphi(s)\, ds \equiv R^{\alpha}_{0,t}\varphi \qquad (\Re(\alpha) > 0).$$

[253] Operadores de Weyl

$$K^{0,\alpha}_{1;1}\, t^{\alpha}\, \varphi = t^{\alpha-1} \int_t^{+\infty} H^{1,0}_{1,1} \left[\begin{matrix} (\alpha + 1,\ 1) \\ (1,\ 1) \end{matrix} \middle| \frac{t}{s} \right] \varphi(s)\, ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^{+\infty} (s - t)^{\alpha-1} \varphi(s)\, ds \equiv W^{\alpha}_{t,\infty}\varphi \qquad (\Re(\alpha) > 0).$$

[254] Operadores de Erdèlyi & Kober

Con $\Re(\alpha) > 0$, $\Re(\beta) > 0$:

$$I^{\eta,\alpha}_{\beta;1}\, \varphi = \frac{1}{t} \int_0^t H^{1,0}_{1,1} \left[\begin{matrix} (\alpha + \eta + 1 - 1/\beta,\ 1/\beta) \\ (\eta + 1 - 1/\beta,\ 1/\beta) \end{matrix} \middle| \frac{s}{t} \right] \varphi(s)\, ds$$

$$= \frac{1}{t} \int_0^t H^{1,0}_{1,1} \left[\begin{matrix} (\alpha + \eta + 1 - 1/\beta,\ 1) \\ (\eta + 1 - 1/\beta,) \end{matrix} \middle| \left(\frac{s}{t}\right)^{\beta} \right] \varphi(s)\, ds$$

$$= \frac{t^{-\beta(\eta+\alpha)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t^{\beta} - s^{\beta})^{\alpha-1}\, s^{\beta(\eta+1)-1} \varphi(s)\, ds \equiv \frac{1}{\beta}\, E^{\alpha,\eta}_{0;t;\beta}\, \varphi$$

$$K^{\eta,\alpha}_{\beta;1}\, \varphi = \frac{1}{t} \int_t^{+\infty} H^{1,0}_{1,1} \left[\begin{matrix} (\alpha + \eta + 1/\beta,\ 1/\beta) \\ (\eta + 1/\beta,\ 1/\beta) \end{matrix} \middle| \frac{t}{s} \right] \varphi(s)\, ds$$

$$= \frac{t^{\beta\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_t^{+\infty} (s^{\beta} - t^{\beta})^{\alpha-1}\, s^{-\beta(\eta+\alpha)+\beta-1} \varphi(s)\, ds \equiv \frac{1}{\beta}\, K^{\alpha,\eta}_{t;\infty;\beta}\, \varphi$$

Por otra parte, también consideraremos las acciones definidas mediante los siguientes núcleos:

[255] Núcleo de Hankel

$$H_{\nu}(t) = t^{3/2}\, J_{\nu}(t) \qquad (\nu \in \mathbb{C}),$$

donde J_ν es la función de Bessel de 1era. especie de orden ν:

$$J_\nu(t) = \sum_{n=o}^{+\infty} \frac{(-1)^n\ (t/2)^{\nu+2n}}{n!\ \Gamma(\nu + n + 1)}.$$

[256] Núcleo de Titchmarsh

$$T_\nu(t) = t^{3/2}\ Y_\nu(t) \qquad (\nu \varepsilon \mathbb{C}),$$

donde Y_ν es la función de Bessel de 2da. especie de orden ν:

$$Y_\nu(t) = \text{cosec}\ (\nu\pi)\ [J_\nu(t)\ \cos\ (\nu\pi) - J_{-\nu}(t)].$$

[257] Núcleo de Meijer

$$M_\nu(t) = t^{3/2}\ K_\nu(t) \qquad (\nu \varepsilon \mathbb{C}),$$

donde K_ν es la función modificada de Bessel de 3era. especie de orden ν:

$$K_\nu(t) = \int_o^{+\infty} e^{-tCH\theta}\ \text{Ch}(\nu\theta)\ d\theta \qquad (\Re(\nu) > -1/2,\ \Re(t) > 0).$$

[258] Núcleo de Struve

$$S_\nu(t) = t^{3/2}\ H_\nu(t) \qquad (\nu \varepsilon \mathbb{C}),$$

donde H_ν es la función de Struve de orden ν:

$$H_\nu(t) = \sum_{n=o}^{+\infty} \frac{(-1)^n\ (z/2)^{\nu+2n+1}}{\Gamma(n + 3/2)\ \Gamma(\nu + n + 3/2)}.$$

[259] Núcleo de Stieltjes

$$\mathscr{S}_\rho(t) = t^{\rho-1}\ (1 + t)^{-\rho} \qquad (\rho \varepsilon \mathbb{C}).$$

Proposición [II.5.5]

(i) Los operadores de Riemann - Liouville de orden α son contínuos entre los espacios $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}$ y $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}-\Re(\alpha)}$ cuando $\mathfrak{r} < 1$.

(ii) Los operadores de Weyl de orden α son contínuos entre los espacios $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}$ y $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}-\Re(\alpha)}$ cuando $0 < \Re(\alpha) < \mathfrak{r}$.

(iii) Los operadores $I^{\eta,\alpha}_{\beta;1}$ son contínuos espacio $\mathfrak{M}_r$ en sí mismo si resulta $r < \Re(\beta\ (\eta + 1))$.

(iv) Los operadores $K^{\eta,\alpha}_{\beta;1}$ son contínuos espacio $\mathfrak{M}_r$ en sí mismo si resulta $\Re(\beta)\ \Re(\alpha - 1) < r + \Re(\beta\ (1 - \eta - \alpha))$.

Demostración:

Sea $f \in \mathfrak{M}_r$; escribimos:

[260]
$$
\begin{aligned}
{}_0I_t^{-\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} f(s)\, ds \\
&= \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{+\infty} S_{\mathfrak{RL}}(u)\ f\left(\frac{t}{u}\right) \frac{du}{u}
\end{aligned}
$$

donde hemos puesto

[261]
$$S_{\mathfrak{RL}}(u) = u^{-1}\ (1 - u^{-1})^{\alpha-1}\ \chi_{(1,+\infty)}(u) \qquad (u > 0).$$

Tenemos ahora:

$$\sup_{x\ \in\ \mathbb{R}} |x|^n\ e^{-rx}\ |S_{\mathfrak{RL}}(e^{-x})| < +\infty \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots\ )$$

sii $r < 1$; i.e. $t^{-\alpha}\ {}_0I^{-\alpha}$ es un operador lineal contínuo sobre $\mathfrak{M}_r$ cuando $r < 1$, de manera que R_0^{α}: $\mathfrak{M}_r \longrightarrow \mathfrak{M}_{r-\Re(\alpha)}$.

Análogamente:

[262]
$$W^{\alpha}_{t,\infty} f = \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 S_{\mathfrak{W}}(u)\ f\left(\frac{t}{u}\right) \frac{du}{u}$$

con

[263]
$$S_{\mathfrak{W}}(u) = u^{-1}\ (u^{-1} - 1)^{\alpha-1}\ \chi_{(0,1)}(u) \qquad (u > 0).$$

En este caso,

$$\sup_{x\ \in\ \mathbb{R}} |x|^n\ e^{-rx}\ |S_{\mathfrak{W}}(e^{-x})| < +\infty \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots\ )$$

sii $0 < \Re(\alpha) < r$, en cuyo caso W^{α}: $\mathfrak{M}_r \longrightarrow \mathfrak{M}_{r-\alpha}$ es un operador lineal contínuo.

Con relación a los operadores de Erdélyi & Kober tenemos:

[264]
$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{1}{\beta}\, E^{\alpha,\eta}_{o;t;\beta} f = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_1^{+\infty} S_E(u)\, f\left(\frac{t}{u}\right) \frac{du}{u} \\ \\ \dfrac{1}{\beta}\, K^{\alpha,\eta}_{t;\infty;\beta} f = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^{1} S_K(u)\, f\left(\frac{t}{u}\right) \frac{du}{u} \end{array}\right.$$

donde, para $u > 0$, estamos indicando:

[265]
$$\left\{\begin{array}{l} S_E(u) = u^{-\beta(1+\eta)}\, (1 - u^{-\beta})^{\alpha-1}\, \chi_{(1,+\infty)}(u) \\ \\ S_K(u) = u^{-\beta(1-\eta-\alpha)}\, (u^{-\beta} - 1)^{\alpha-1}\, \chi_{(0,1)}(u). \end{array}\right.$$

Dado $u > 1$, existe una constante $C > 0$ tal que

[266]
$$\left| (1 - u^{-\beta})^{\alpha-1} \right| \le C\, (1 \pm u^{-\Re(\beta)})^{\Re(\alpha)-1}$$

donde corresponderá el signo (+) si $\Re(\alpha) \ge 1$, o (−) si $0 < \Re(\alpha) < 1$.

De [266] sigue entonces (iii). Con un razonamiento análogo tendremos (iv). ∎

Proposición [II.5.6]

Dado un número real $a \neq 0$, la aplicación $e_a : \mathfrak{M}_r \longrightarrow \mathfrak{M}_{ar}$ dada por la relación $e_a f(t) = f(t^a)$, $f \in \mathfrak{M}_r$, $t > 0$, establece un homeomorfismo entre $\mathfrak{M}_r$ y $\mathfrak{M}_{ar}$.

Demostración:

Dados $f \in \mathfrak{M}_r$, y enteros no negativos k, h, es posible escribir:

[267]
$$(e_a f)^{(k)}(t) = \sum_{p=1}^{k} c_p^k\, t^{ap-k}\, f^{(p)}(t^a)$$

donde los coeficientes c_p^k's son independientes de f; entonces se dedúce enseguida la relación:

[268]
$$\gamma^{[ar]}_{k,h}(e_a f) \le \sum_{p=1}^{k} |c_p^k|\, \gamma^{[r]}_{p,h}\, (e_a f).$$

Como k, h, f son cualesquiera, sigue entonces la continuidad de la aplicación e_a; es inmediata, por otra parte, la relación:

[269] $$(e_a)^{-1} = e_{a^{-1}}$$

de donde sigue la proposición ∎

<u>Proposición [II.5.7]</u>

Dados $\mathfrak{r} \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{C}$, tales que $-\Re(\nu) - 3/2 < \mathfrak{r} < -1$, la transformada de Hankel $\mathfrak{h}_\nu$: $\mathfrak{M}_{-\mathfrak{r}} \longrightarrow \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}-1}$ es un operador contínuo.

<u>**Demostración:**</u>

Sea $f \in \mathfrak{M}_\mathfrak{r}$; siguiendo [II.5.1], el operador inducido por el núcleo de Hankel [255] está dado mediante:

[270] $$T_{H_\nu} f\,(t) = t\, \mathfrak{h}_\nu\{e_{-1} f;\ t\}$$

donde con $\mathfrak{h}_\nu$ simbolizamos la transformada de Hankel de orden ν.

Caben ahora las siguientes observaciones:

- Si $\nu \notin \mathbb{Z}$,

[271] $$J_\nu(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^\nu \left[\frac{1}{\Gamma(\nu + 1)} + O(t)\right].$$

- Si $\nu = n$, $n \in \mathbb{N}_o$,

[272] $$J_n(t) = \sum \frac{(-1)^k}{k!\ (n + k)!} (t/2)^{2k+n}$$

resultando $J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t)$.

- Es válido, además, el siguiente desarrollo asintótico (Jahnke, Emde and Losch, [E, J & L]), con $|\arg z| < \pi$:

[273] $$J_\nu(z) = (2/(\pi z))^{1/2} \cos[z - (2\nu + 1)\ \pi/4] + O(z^{-3/2}).$$

Dado $m \in \mathbb{N}_o$, tenemos

$$\sup_{x \geq o} |\ x^m e^{-\mathfrak{r}x} H_\nu(e^{-x})\ | =$$

[274]
$$= \sup_{x \geq o} 2^{-\Re(\nu)} x^m e^{-(\mathfrak{r}+3/2+\Re(\nu))x} \left[\frac{1}{|\ \Gamma(\nu + 1)|} + O(e^{-x})\right]$$

y la expresión [274] será finita sii $\mathfrak{r} + 3/2 + \Re(\nu) > 0$.

Para x - negativo, $|x|$ lo suficientemente grande tenemos

$$| x^m e^{-\mathfrak{r}x} H_\nu (e^{-x}) | = (-x)^m e^{-(\mathfrak{r}+3/2)x} |J_\nu(e^{-x})|$$

[275]
$$= (-x)^m e^{-(\mathfrak{r}+3/2)x} [(2 e^x/\pi)^{1/2} \cos[z - (2\nu + 1) \pi/4] + O(e^{3x/2})]$$
$$\leq (-x)^m [(2/\pi)^{1/2} e^{-(\mathfrak{r}+1)x} + O(e^{-\mathfrak{r}x})].$$

Deducimos que

[276]
$$\sup_{x<0} | x^m e^{-\mathfrak{r}x} H_\nu (e^{-x}) | < \infty$$

si $\mathfrak{r} < -1$ (más aún, esta condición es necesaria).

En definitiva, si $-\Re(\nu) - 3/2 < \mathfrak{r} < -1$, entonces

[277]
$$\sup | x^n e^{-\mathfrak{r}x} H_\nu (e^{-x}) | < +\infty \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

y, por [II.5.1] el operador T_{H_ν} es entonces un endomorfismo contínuo sobre $\mathfrak{M}_\mathfrak{r}$; de [270] sigue enseguida la tesis ∎

<u>Proposición [II. 5.8]</u>

Dados $\mathfrak{r} \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{C}$, tales que $| \Re(\nu) | < \mathfrak{r} + 3/2$, $\mathfrak{r} < -1$, la transformada de Titchmarsh $\mathcal{Y}_\nu$: $\mathfrak{M}_{-\mathfrak{r}} \longrightarrow \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}-1}$, definida mediante la relación

$$\mathcal{Y}_\nu\{g;\ t\} = \int_0^{+\infty} g(s)\ Y_\nu(st)\ (st)^{1/2}\ ds$$

cada vez que la integración anterior es posible, es un operador contínuo.

<u>Demostración:</u>

En princípio, dada $f \in \mathfrak{M}_\mathfrak{r}$ tenemos:

[278]
$$T_{T_\nu} f(t) = \mathcal{Y}_\nu\{e_{-1}f;\ t\}.$$

De [255] y la representación [256] de Y_ν tenemos:

[279] $$T_\nu(t) = \operatorname{cosec}(\nu\pi)\,[H_\nu(t)\cos(\nu\pi) - H_{-\nu}(t)].$$

Ahora, en analogía con [277], para $|\Re(\nu)| < r + 3/2$, $r < -1$ resulta:

[280] $$\operatorname{SUP}\,|\,x^n e^{-rx}\, T_\nu(e^{-x})\,| < +\infty \quad (n = 0, 1, \dots).$$

El resto sigue como en la proposición anterior ∎

<u>Corolario [II. 5.9]</u>

En las mismas condiciones [II.5.8], la K - transformada de orden ν, definida mediante

$$\mathfrak{K}_\nu\{g;\, t\} = \int_0^{+\infty} g(s)\, K_\nu(st)\,(st)^{1/2}\, ds$$

define un operador continuo $\mathfrak{K}_\nu : \mathfrak{M}_{-r} \longrightarrow \mathfrak{M}_{r-1}$.

<u>Demostración:</u>

Las funciones modificadas de Bessel de 3era. especie K_ν (introducida en [257]) e I_ν (ésta última dada, para $t > 0$, mediante la relación $I_\nu(t) = e^{\mp\nu\pi i/2} J_\nu(\pm\, it)$) están relacionadas por:

[281] $$K_\nu(t) = \pi/2 \operatorname{cosec}(\nu\pi)\,[I_{-\nu}(t) - I_\nu(t)].$$

Escribiremos:

[282] $$\mathfrak{I}_\nu(t) = H_\nu(it) \qquad (t > 0).$$

Tenemos

[283] $$M_\nu(t) = i^{-3/2}\, \frac{\pi}{2} \operatorname{cosec}(\nu\pi) \left[e^{i\pi\nu/2}\, \mathfrak{I}_{-\nu}(t) - e^{-i\pi\nu/2}\, \mathfrak{I}_\nu(t) \right],$$

donde M_ν es el núcleo de Meijer introducido en [279]. Trabajando como en [II. 5.7], el operador $T_{\mathfrak{I}_\nu}$ inducido sobre $\mathfrak{M}_r$ resulta continuo.

Además:

[284] $$\mathfrak{K}_\nu\{g;\, t\} = t^{-1}\, T_{M_\nu}\{e_{-1} g; t\}$$

de donde sigue la tesis ∎

Proposición [II.5.10]

Sean $r \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{C}$ t. q. $\mathrm{MAX}\{- r - 5/2, -1/2\} < \Re(\nu) < - r - 3/2$.

En estas condiciones, la H − transformada de orden ν, definida por:

$$\mathcal{H}_\nu\{ g;\ t\} = \int_0^{+\infty} g(s)\ H_\nu(st)\ (st)^{1/2}\ ds$$

toda vez que la integración precedente está definida, define un operador contínuo entre los espacios $\mathfrak{M}_{-r}$ y $\mathfrak{M}_{r-1}$.

Demostración:

De la expresión [258] de la función H_ν de Struve tenemos:

[285] $$H_\nu(t) = \left(\frac{z}{2} \right)^{\nu+1} \left[\frac{1}{\Gamma(3/2)\ \Gamma(\nu + 3/2)} + O(t) \right].$$

Por otra parte es válida la siguiente representación integral de H_ν para $\Re(\nu) > - 1/2$:

[286] $$H_\nu(t) = \frac{2^{1-\nu}\ z^\nu}{\pi^{1/2}\ \Gamma(\nu + 1/2)} \int_0^1 (1 - s^2)^{\nu-1/2}\ \mathrm{sen}(st)\ ds.$$

En particular, notemos que:

$$\left| \int_0^1 (1 - s^2)^{\nu-1/2}\ \mathrm{sen}(st)\ ds \right| \le \int_0^1 (1 - s^2)^{\Re(\nu)-1/2}\ ds$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - u)^{\Re(\nu)-1/2}\ u^{-1/2}\ du$$

[287]

$$= 1/2\ \mathrm{Be}(\Re(\nu) + 1/2,\ 1/2).$$

De [258], [285] y [287] y la relación

[288] $$T_{S_\nu} f(t) = \mathcal{H}_\nu\{e_{-1} f;\ t\}$$

sigue la proposición ∎

Proposición [II.5.11]

Sean $r \in \mathbb{R}$, $\rho \in \mathbb{C}$, tales que $1 - \Re(\rho) < r < 1$. Entonces la transformada de Stieltjes de orden ρ establece una aplicación contínua entre los espacios $\mathfrak{M}_r$ y $\mathfrak{M}_{r-\rho+1}$.

Demostración:

Dada $f \in \mathfrak{M}_r$; tenemos entonces

[289] $$T_{\mathcal{S}_\rho} f(t) = t^{\rho-1} \mathfrak{S}_\rho\{ f;\ t\}.$$

La conclusión sigue con el mismo razonamiento empleado en los casos anteriores ∎

§6 Sobre la restricción de ciertos homeomorfismos de $F_{p,\mu}$ a $\mathfrak{M}_r$.

En este punto se van a analizar homeomorfismos de los espacios de McBride, cuya restricción a los espacios $\mathfrak{M}_r$ es un homeomorfismo sobre estos últimos. Concretamente, analizaremos los operadores $G^{\eta,\alpha}$ y $H^{\eta,\alpha}$, definidos por W. Lamb y A. C. McBride, a saber:

[290] $$(G^{\eta,\alpha}\varphi)(t) = \frac{t^{\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_t^{+\infty} [\log(s/t)]^{\alpha-1}\, s^{-\eta-1}\, \varphi(s)\, ds \qquad (t > 0),$$

donde $\Re(\eta - \mu) > -1/p$, $\Re(\alpha) > 0$, extendiendose esta definición al caso $\Re(\alpha) \le 0$ mediante:

[291] $$G^{\eta,\alpha}\varphi = \eta\, G^{\eta,\alpha+1}\varphi - G^{\eta,\alpha+1}\delta\varphi.$$

Por otra parte, si $\Re(\eta + \mu) + 1 > 1/p$, $\Re(\alpha) > 0$, hacemos:

[292] $$(H^{\eta,\alpha}\varphi)(t) = \frac{t^{-\eta-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t} [\log(t/s)]^{\alpha-1}\, s^{\eta}\, \varphi(s)\, ds \qquad (t > 0)$$

y la correspondiente extensión al caso $\Re(\alpha) \le 0$

[293] $$H^{\eta,\alpha}\varphi = (\eta + 1)\, H^{\eta,\alpha+1}\varphi + H^{\eta,\alpha+1}\delta\varphi.$$

El carácter de estas acciones sobre los espacios de McBride puede establecerse mediante una generalización, debida a E. Love [Lo], de una desigualdad de Hardy [H] o bien derivarse como una aplicación de la teoría de potencias fraccionarias de Lamb y A. C. McBride [L & McB].

Con la notación de [II.5.1] podemos escribir

[294] $$\begin{cases} G^{\eta,\alpha} = T_{\mathscr{G}^{\eta,\alpha}} \\ H^{\eta,\alpha} = T_{\mathscr{H}^{\eta,\alpha}} \end{cases}$$

donde, para t positivo, escribimos:

[295] $$\begin{cases} \mathscr{G}^{\eta,\alpha}(t) = 1/\Gamma(\alpha)\ (\log 1/t)^{\alpha-1}\ t^{\eta}\ \chi_{(0,1)}(t), \\ \mathscr{H}^{\eta,\alpha}(t) = 1/\Gamma(\alpha)\ (\log t)^{\alpha-1}\ t^{-\eta-1}\ \chi_{(1,+\infty)}(t). \end{cases}$$

De la aplicación directa del criterio establecido en [II. 5.1], deducimos $G^{\eta,\alpha}$ (resp. $H^{\eta,\alpha}$) es un operador contínuo sobre $\mathfrak{M}_r$ si $\Re(\alpha) \geq 1$ y $\Re(\eta) + r > 0$ (resp. si $\Re(\alpha) \geq 1$ y $\Re(\eta) - r > -1$).

<u>Proposición [II.6.1]</u>

Sean $r \in \mathbb{R}$, α, $\eta \in \mathbb{C}$ tales que $0 < \Re(\alpha)$, $\Re(\eta) + r > 0$.

Entonces $G^{\eta,\alpha}$ es un operador contínuo de $\mathfrak{M}_r$ en sí mismo.

<u>Demostración:</u>

Sean $f \in \mathfrak{M}_r$, k, h enteros no negativos. Se probarán las identidades siguientes:

[296] $$(G^{\eta,\alpha}f)^{(k)}(t) = G^{\eta-k,\alpha}f^{(k)}(t),$$

[297] $$(\ln t)^h\ G^{\eta,\alpha}f(t) = \sum_{j=0}^{h} (-1)^j \binom{h}{j} G^{\eta,\alpha+j}((\ln t)^{h-j} f(t))$$

válidas para $t > 0$.

Fijado s positivo, sea $t_o > s$ t.q.

[298] $$t^r\ |f(t)| \leq 1 \text{ si } t > t_o.$$

Entonces tenemos

$$\left| \int_0^{s/t_o} f(s/t)\ t^{\eta-1}\ (\ln 1/t)^{\alpha-1}\ dt \right| \leq$$

$$\le \int_0^{s/t_0} |f(s/t)|\ t^{\Re(\eta)-1}\ (\ln 1/t)^{\Re(\alpha)-1}\ dt$$

[299]

$$\le s^{-r} \int_0^{s/t_0} t^{\Re(\eta)+r-1}\ (\ln 1/t)^{\Re(\alpha)-1}\ dt.$$

Como $\Re(\eta) + r > 0$ la integral anterior es finita. Por otra parte

[300] $$\left| \int_{s/t_0}^{1} t^{\eta-1}\ (\ln 1/t)^{\alpha-1}\ dt \right| \le C_1 \int_0^{\ln(t_0/s)} t^{\Re(\alpha)-1}\ dt < \infty$$

donde C_1 es alguna constante positiva que dependerá de $\Re(\eta)$. De las desigualdades anteriores vemos que $G^{\eta,\alpha}f(s)$ está definido y es finito.

Veamos que

[301]

$$\int_0^1 \frac{f((s+\varepsilon)/t) - f(s/t)}{\varepsilon}\ \frac{(\log 1/t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\ t^{\eta-1}\ dt \underset{(\varepsilon \longrightarrow 0)}{\longrightarrow} G^{\eta-1,\alpha}f^{(1)}(s).$$

Usando el mismo razonamiento, reemplazando η y r por $\eta - 1$ y $r + 1$ respectivamente, vemos que $G^{\eta-1,\alpha}f^{(1)}(s)$ también está definido.

Dados ε / $0 < |\varepsilon| < s/2$, $0 < t \le s/t_0$, aplicando el teorema del valor medio y la relación [298] tenemos

[302] $$1/\varepsilon\ |f((s+\varepsilon)/t) - f(s/t)| \le C_2\ t^{r+1}.$$

Dados ε / $0 < |\varepsilon| < s/2$, $s/t_0 \le t \le 1$, aplicando nuevamente el teorema del valor medio resulta:

[303]

$$\left| \frac{f((s+\varepsilon)/t) - f(s/t)}{\varepsilon} \right| \le t^{-1}\ \mathrm{MAX} \left\{ |f^{(1)}(t)| : s/2 \le t \le 3/2\ t_0 \right\}.$$

Por [300] y puesto que

$$\int_0^{s/t_0} |f(s/t)|\ t^{\Re(\eta)+r}\ (\ln 1/t)^{\Re(\alpha)-1}\ dt < \infty$$

ya que $\Re(\eta) + \mathfrak{r} > 0$, la relación [301] será consecuencia del teorema de Lebesgue de convergencia mayorada. Como s es arbitrario sigue [296] cuando k = 1 e inductivamente el caso general.

La identidad [297] es inmediata; notemos, en particular, que cada una de las funciones $t \longrightarrow G^{\eta,\alpha+j}((\ln t)^{h-j} f(t))$ está bien definida pues las aplicaciones $t \longrightarrow (\ln t)^{h-j} f(t)$ pertenecen a $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}$.

La combinación de [296] y [297] nos da

[304]
$$(\ln t)^h \, (G^{\eta,\alpha} f)^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^{h} (-1)^j \begin{bmatrix} h \\ j \end{bmatrix} G^{\eta-k,\alpha+j}((\ln t)^{h-j} f^{(k)}(t)).$$

De esta última identidad, tendremos la tesis si probamos que

[305]
$$t^{\mathfrak{x}} \, G^{\nu,\theta} g(t) \longrightarrow 0 \qquad (t \longrightarrow 0 \text{ o } t \longrightarrow +\infty)$$

cada vez que $g \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{x}}$, $\Re(\theta) > 0$, $\Re(\nu) + \mathfrak{x} > 0$.

Trabajando en estas condiciones, dado $\xi > 0$, sea $0 < \delta < 1$ t.q.

[306]
$$t^{\mathfrak{x}} \, |g(t)| \le \xi \qquad \text{si} \qquad 0 < t < \delta \text{ o } t > \delta^{-1}.$$

Si $t > \delta^{-1}$, por [306] obtenemos

$$|t^{\mathfrak{x}} \, G^{\nu,\theta} g(t)| \le \int_0^1 (t/s)^{\mathfrak{x}} \, |g(t/s)| \, \left| \frac{s^{\mathfrak{x}+\nu-1}}{\Gamma(\theta)} (\ln 1/s)^{\theta-1} \right| ds$$

[307]

$$\le \xi \, (\mathfrak{x} + \Re(\nu))^{-\Re(\theta)} \, \Gamma(\Re(\theta)) / |\Gamma(\theta)|.$$

Por otro lado, sea $0 < \sigma < 1$ t.q.

[308]
$$\int_0^{\sigma} \left| \frac{s^{\mathfrak{x}+\nu-1}}{\Gamma(\theta)} (\ln 1/s)^{\theta-1} \right| ds \le \xi.$$

Ahora, si $0 < t < \delta\,\sigma$ tenemos

$$|t^{\mathfrak{x}} \, G^{\nu,\theta} g(t)| \le \left[\int_0^{\sigma} + \int_{\sigma}^{1} \right] (t/s)^{\mathfrak{x}} \, |g(t/s)| \, \left| \frac{s^{\mathfrak{x}+\nu-1}}{\Gamma(\theta)} (\ln 1/s)^{\theta-1} \right| ds$$

[309]

$$\le \xi \left[\gamma_{0,0}^{[\mathfrak{x}]}(g) + (\mathfrak{x} + \Re(\nu))^{-\Re(\theta)} \, \Gamma(\Re(\theta)) / |\Gamma(\theta)| \right].$$

Como ξ es arbitrario, de [307] y [309] sigue [305]. Queda así probado que, en las condiciones de la hipótesis, $G^{\eta,\alpha}(\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}) \subseteq \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}$

La continuidad de $G^{\eta,\alpha}$ es inmediata, pues sabemos que la inclusión de $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}$ en los espacios de McBride es contínua. Más aún, notemos que se puede reescribir [307] en la forma

[310] $$|t^{\mathfrak{x}}\, G^{\nu,\theta}g(t)| \leq \gamma_{o,o}^{[\mathfrak{x}]}(g)\, (\mathfrak{x} + \Re(\nu))^{-\Re(\theta)}\, \Gamma(\Re(\theta))/|\Gamma(\theta)|,$$

cualquiera sea $t > 0$; i.e.

[311] $$\gamma_{o,o}^{[\mathfrak{x}]}(G^{\nu,\theta}g) \leq \gamma_{o,o}^{[\mathfrak{x}]}(g)\, (\mathfrak{x} + \Re(\nu))^{-\Re(\theta)}\, \Gamma(\Re(\theta))/|\Gamma(\theta)|.$$

Ahora de [304] y [311], con k, h enteros no negativos y η, α, $\mathfrak{r}$ en las condiciones de la hipótesis, dada $f \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}$ obtenemos:

$$|t^{k+\mathfrak{r}}\, (\ln\, t)^h\, (G^{\eta,\alpha}f)^{(k)}(t)| \leq$$

$$\leq \sum_{j=o}^{h} \binom{h}{j} |t^{k+\mathfrak{r}}\, G^{\eta-k,\alpha+j}((\ln\, t)^{h-j}\, f^{(k)}(t))|$$

$$\leq \sum_{j=o}^{h} \binom{h}{j} \gamma_{o,o}^{[\mathfrak{r}]}(G^{\eta-k,\alpha+j}((\ln\, t)^{h-j}\, f^{(k)}(t)))$$

$$\leq \sum_{j=o}^{h} \binom{h}{j} \gamma_{k,h-j}^{[\mathfrak{r}]}(f)\, (\mathfrak{r} + \Re(\eta))^{-\Re(\alpha)-j}\, \Gamma(\Re(\alpha) + j)/|\Gamma(\alpha + j)|.$$

de donde tenemos

$$\gamma_{k,h}^{[\mathfrak{r}]}(G^{\eta,\alpha}f) \leq \sum_{j=o}^{h} \binom{h}{j} \gamma_{k,h-j}^{[\mathfrak{r}]}(f)\, \frac{\Gamma(\Re(\alpha) + j)}{|\Gamma(\alpha + j)|}\, (\mathfrak{r} + \Re(\eta))^{-\Re(\alpha)-j}$$

lo cual da, explícitamente, la continuidad de $G^{\eta,\alpha}$ sobre $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}$. ▌

Corolario [II.6.2]

$G^{\eta,\alpha}$ es contínuo sobre $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}$ cada vez que $\Re(\eta) + \mathfrak{r} > 0$.

Demostración:

Basta notar que, dado $n \in \mathbb{N}_o$, podemos reescribir [291] en la forma:

[312] $$G^{\eta,\alpha}\varphi = G^{\eta,n+1+\alpha}(\eta - \delta)^{n+1}\varphi$$

si $-\, n - 1 < \Re(\alpha) \leq -\, n$ ▌

Proposición [II.6.3]

Sean α, $\beta \in \mathbb{C}^+$, $\eta \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}$ t.q. $\Re(\eta) + r > 0$. Entonces

$$G^{\eta,\alpha} G^{\eta,\beta} f = G^{\eta,\alpha+\beta} f \qquad (f \in \mathfrak{M}_r).$$

En particular, $G^{\eta,\alpha} G^{\eta,\beta} = G^{\eta,\beta} G^{\eta,\alpha}$.

Demostración:

Si $0 < t < u$, entonces

[313] $$\int_t^u (\ln s/t)^{\alpha-1} (\ln u/s)^{\beta-1} ds/s = (\ln u/t)^{\alpha+\beta-1} \, \mathrm{Be}(\alpha,\beta).$$

Dada entonces $f \in \mathfrak{M}_r$, $t > 0$, hacemos:

$G^{\eta,\alpha} G^{\eta,\beta} f(t) =$

$$= \frac{t^\eta}{\Gamma(\alpha)} \int_t^\infty (\ln s/t)^{\alpha-1} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_s^\infty (\ln u/s)^{\beta-1} u^{-\eta-1} f(u) \, du \, ds/s$$

$$= \frac{t^\eta}{\Gamma(\alpha)} \int_t^\infty \frac{u^{-\eta-1}}{\Gamma(\beta)} f(u) \int_t^u (\ln s/t)^{\alpha-1} (\ln u/s)^{\beta-1} ds/s \, du$$

[314]

$$= G^{\eta,\alpha+\beta} f(t) \qquad \blacksquare$$

Corolario [II.6.4]

Los operadores $G^{\eta,\alpha}|_{\mathfrak{M}_r}$ $(\Re(\eta) + r > 0)$, son homeomorfismos.

Demostración:

Dado $\alpha \in \mathbb{C}$, si $n \in \mathbb{N}_0$ / $-n-1 < \Re(-\alpha) \le -n$ tenemos

[315] $$G^{\eta,-\alpha} G^{\eta,\alpha} = G^{\eta,n+1} (\eta - \delta)^{n+1}.$$

Por otra parte

[316] $$G^{\eta,n+1} (\eta - \delta)^{n+1} \equiv \mathrm{Id}_{\mathfrak{M}_r} \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

El caso $n = 0$, sigue por integración por partes y por inducción el caso general. Así $(G^{\eta,\alpha})^{-1} = G^{\eta,-\alpha}$ y bastará aplicar [II.6.2]. $\blacksquare$

Nota [II.6.5]

Razonando en forma similar a [II.6.1], $H^{\eta,\alpha}$ resulta homeomorfismo sobre $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}$ cada vez que $\Re(\eta) - \mathfrak{r} + 1 > 0$.

Si escribimos formalmente

[317] $$\langle f, g \rangle = \int_{0}^{+\infty} f(t)\, \overline{g(t)}\, dt/t,$$

dado $\mathfrak{r}$ real, la expresión anterior está definida cada vez que $f \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}$, $g \in \mathfrak{M}_{-\mathfrak{r}}$. Más aún, (v. [164] y [179])

[318] $$|\langle f, g \rangle| \le \| \mathbb{M}^{\mathfrak{r}} f \|_{1}\, \gamma_{0,0}^{[-\mathfrak{r}]}(g)$$

lo que da la realización de los elementos de $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}}$ en cuanto transformaciones generalizadas sobre $\mathfrak{M}_{-\mathfrak{r}}$.

Tenemos también

[319] $$\langle G^{\eta,\alpha} f, g \rangle = \langle f, H^{\overline{\eta-1},\overline{\alpha}}\, g \rangle,$$

de modo que

[320] $$(G^{\eta,\alpha})' = H^{\overline{\eta-1},\overline{\alpha}}$$

y también

[321] $$G^{\eta,\alpha} : \mathfrak{M}_{\mathfrak{r}} \longrightarrow (\mathfrak{M}_{-\mathfrak{r}})',$$

siendo $(\mathfrak{M}_{-\mathfrak{r}})'$ el espacio de funciones generalizadas sobre $\mathfrak{M}_{-\mathfrak{r}}$. Munido $(\mathfrak{M}_{-\mathfrak{r}})'$ de la topología débil, vía $G^{\eta,\alpha}$ tenemos $\mathfrak{M}_{\mathfrak{r}} \equiv (\mathfrak{M}_{-\mathfrak{r}})'$ como acabamos de señalar. Finalmente, puesto que $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^{+})$ es denso en $\mathfrak{M}_{-\mathfrak{r}}$, según se demostrara en [II.2.1], y su topología es más fina que la topología que hereda de $\mathfrak{M}_{-\mathfrak{r}}$, las funciones generalizadas sobre $\mathfrak{M}_{-\mathfrak{r}}$ son propiamente distribuciones.

Anexo

[A.1] Antecedentes históricos.

Sir Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried W. Leibnitz (1646-1716) sentaron, en gran medida, las bases de lo que podríamos denominar Análisis Moderno, ya sea con ideas propias o mejorando construcciones anteriormente establecidas. Ambos pensadores trabajaron en forma separada, desconociendo uno las investigaciones del otro, en países diferentes, con motivaciones diferentes y en forma prácticamente simultánea.

En particular, debemos a Leibnitz la notación clásica $d^n y / dx^n$ utilizada para indicar la derivada de orden n (n = 0, 1, 2, ...) de una función $y = y(x)$ de la variable real x. Hacia 1695, Guillaume François de L'Hospital (1661-1704) analizaba la posibilidad de dar sentido a derivadas de orden 1/2; en opinión de Leibnitz [Le], era delicado efectuar un análisis tal que permitiera hacer tal construcción sin generar paradojas. En 1697, el propio Leibnitz utilizaba la notación $d^{1/2}y$ para referirse a la representación de $\pi/2$ en producto infinito, obtenida por John Wallis (1616-1703) en su *"Arithmetica Infinitorum"*.

La primer referencia a derivadas de orden arbitrario se debe a Sylvestre François Lacroix (1765-1843) en su libro *"Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral"* [La], en 1819. Haciendo $y = x^m$ y usando la relación:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!}\, x^{m-n}$$

Lacroix obtenía, al reemplazar n por 1/2 y m por un número positivo arbitrario a, la expresión:

$$\frac{d^{1/2}y}{dx^{1/2}} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+1/2)}\, x^{a-1/2}$$

reflejandose la corriente formalista que caracterizaba a la época.

La primer aplicación de las técnicas de diferenciación de orden arbitrario se registra en 1823, en el estudio realizado por Niels Henrik Abel (1802-1829) sobre el problema isócrono [A]. En el mismo, Abel hacía gala de una técnica tan elegante que impulsó a Joseph Liouville (1809-1882) en sus esfuerzos por dar un andamiaje lógico a la diferenciación fraccionaria [Li]. Liouville publicó tres extensos trabajos en 1832 y otros varios hacia 1855; en estos se parte de la relación:

$$D_x^n\, e^{ax} = a^n\, e^{ax}$$

válida para cualquier entero no negativo n, la cual se generaliza naturalmente en la forma:

$$D_x^\nu\, e^{ax} = a^\nu\, e^{ax}$$

donde ahora ν es un número arbitrario, ya sea real o complejo. Dada una función de variable real $f = f(x)$, Liouville considera la expansión de f en una serie del tipo:

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m\, e^{a_m x}$$

y da la primera definición de derivación de orden arbitrario de una función f, a saber:

$$D_x^\nu\, f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m\, a_m^\nu\, e^{a_m x}.$$

Desde luego, esta definición tiene la desventaja que supone restringir ν a valores para los que la serie anterior sea convergente.

Por otra parte, Liouville consideraba funciones del tipo x^{-a}, a positivo. Luego se puede escribir:

$$I_a(x) = \int_0^\infty t^{a-1}\, e^{-xt}\, dt.$$

Haciendo $s = xt$ se obtiene

$$x^{-a} = \frac{I_a(x)}{\Gamma(a)}.$$

Por lo tanto resulta:

$$\begin{aligned} D_x^\nu\, x^{-a} &= \frac{1}{\Gamma(a)}\, D_x^\nu\, I_a(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty t^{a-1}\, (-t)^\nu\, e^{-xt}\, dt \\ &= \frac{(-1)^\nu}{\Gamma(a)}\, I_{a+\nu}(x) \\ &= (-1)^\nu\, \frac{\Gamma(a+\nu)}{\Gamma(a)}\, x^{-a-\nu}. \end{aligned}$$

Este segundo punto de vista solamente es aplicable a una familia muy limitada de funciones, no obstante lo cual Liouville obtuvo importantes resultados, mediante la aplicación de estas técnicas, en problemas sobre teoría de potencial.

Entre los años 1835 a 1850 se estableció una suerte de controversia entre los puntos de vista adoptados por Lacroix y Liouville; Augustus De Morgan sugería que ambas teorías solo eran aspectos parciales de una teoría más general. Sin embargo, en 1850, William Center [R2] desechaba tal posibilidad al notar que, mientras la derivada fraccionaria de una función constante en el sentido de Lacroix era una función no constante, la correspondiente derivada en el sentido de Liouville era nula en todo punto.

En 1847, Bernhard Riemann [R2], [Ri] (1826-1866) definía:

$$D_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t)\, dt + \psi(x).$$

Notemos que Riemann, probablemente influenciado por las investigaciones de Liouville, añadió un término complementario, cuya naturaleza no pudo determinar. Hacia 1880, el matemático britanico Arthur Cayley (1821 - 1895) establecía que tal término complementario era de naturaleza indeterminada.

No obstante las controversias suscitadas, el planteo de L'Hospital suscitó un número importante de investigaciones.

Se debería esperar hasta la última década del s. XIX, en la cual se publicaron los trabajos de Oliver Heaviside (1850-1925), para hallar un marco teóricamente consistente que permitiera el ulterior desarrollo del denominado cálculo diferencial e integral fraccionario.

[A.2] Las bases teóricas del Análisis Fraccionario.

Se postula la existencia de un operador del tipo:

$$f(z) \longrightarrow {}_cD_z^{-\nu} f(z)$$

el cual estará definido sobre una familia de funciones f's de la variable compleja $z = x + iy$ a ser determinada; nos referiremos a c y ν como a las variables de entrada (ambas complejas) y se asume que la aplicación transformada es, igualmente, una función de z. Los operadores resultantes deberán poseer las siguientes propiedades:

(1) Si f(z) fuere analítica, ${}_cD_z^{-\nu} f(z)$ será una función analítica en

las variables ν y z.

(2) Debe verificarse:

(2.1) ${}_cD_z^n \ f(z) = \dfrac{d^n f}{dz^n}(z)$ si n = 0, 1, 2, ...

(2.2) $\dfrac{d^n}{dz^n} \ {}_cD_z^{-n} \ f(z) = f(z)$ y además

$$\frac{d^m}{dz^m} \ {}_cD_z^{-n} \ f(z)\Big|_{z=c} = 0 \quad \text{si } n = 1, 2, \ldots, m = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

(3) ${}_cD_z^{\nu} \ [\ \alpha \ f(z) + g(z)\ ] = \alpha \ {}_cD_z^{\nu} \ f(z) + {}_cD_z^{\nu} \ g(z)$ ($\mathbb{C}$ – linealidad).

(4) ${}_cD_z^{-\nu} \ {}_cD_z^{-\mu} \ f(z) = {}_cD_z^{-\nu-\mu} \ f(z)$ (ley de exponentes).

[A.3] Existencia de operadores fraccionarios.

Se puede establecer la existencia de operadores fraccionarios de diversas maneras, algunas de las cuales esbozamos a continuación:

§ El método de Euler [E]

Se considera la fórmula siguiente:

$$\text{[i]} \qquad \int_a^x (x-t)^{\nu-1} \ (t-a)^{\mu-1} \ dt = (x-a)^{\nu+\mu-1} \ \mathrm{Be}(\nu,\mu)$$

en la cual a, x son nos. reales y ν, μ son nos. complejos con parte real positiva. En particular, si ν = n es un entero positivo tenemos:

$$\int (t-a)^{\mu-1} \ dt = \frac{(t-a)^{\mu}}{\mu} + c_1,$$

$$\int \frac{(t-a)^{\mu}}{\mu} \ dt = \frac{(t-a)^{\mu+1}}{\mu(\mu+1)} + c_2,$$

....

$$\int \frac{(t-a)^{\mu+p-1}}{\mu \ \ldots \ (\mu+p-1)} \ dt = \frac{(t-a)^{\mu+p}}{\mu \ \ldots \ (\mu+p)} + c_{p+1}$$

con p = 0, 1, ... , n−1. Haciendo $c_1 = \dots = c_n = 0$ resulta:

$$\int \frac{(t-a)^{\mu+p-1}}{\mu \dots (\mu+p-1)}\, dt = \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+p+1)} (t-a)^{\mu+p}$$

[ii]

$$= \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-s)^p (s-a)^{\mu-1}\, ds.$$

Por lo tanto, teniendo presente (2.2), y haciendo p = n−1 en la expresión anterior se define:

[iii] $${}_aD_x^{-n} (x-a)^{\mu-1} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} (t-a)^{\mu-1}\, dt.$$

Por extensión, escribimos entonces:

[iv] $${}_aD_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^x (x-t)^{\nu-1} f(t)\, dt$$

donde, p. ej. $f \in \mathbb{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$, $\nu \in \mathbb{C}$ y $\mathbb{R}(\nu)>0$.

Claramente, si f = f(z) fuera una función analítica, la expresión [iv] definiría una función analítica de las variables ν y z.

Vamos a definir:

[v] $$\eta(\nu,z) = \frac{d^m}{dz^m}\, {}_aD_z^{-p} f(z) \text{ si } -m < \mathbb{R}(\nu) \le -m+1, \text{ donde } p = \nu + m.$$

Notemos que $0 < p \le 1$. En particular, si $-1 < \mathbb{R}(\nu) \le 0$ tenemos:

$${}_aD_z^{-\nu-1} f(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \int_a^z (z-w)^{\nu} f(w)\, dw$$

[vi]

$$= \frac{d}{dz} \int_a^z \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \int_a^{z'} (z'-w)^{\nu} f(w)\, dw\, dz$$

$$= \eta(\nu,z)$$

y así η define la extensión analítica de ${}_aD_z^{-\nu} f(z)$ a la región $\mathbb{R}(\nu)>-1$ y es claro, por otra parte, que este proceso de extensión puede continuarse mediante un simple proceso inductivo. En particular, si $\nu = -1$

[vii] $$\eta(-1,z) = \frac{d^2}{dz^2}\ {}_aD_z^{-1}\ f(z) = f'(z)$$

y es fácil verificar la validez de la condición (2) de [A.2].

La condición (3) es inmediata y, en cuanto a la ley de exponentes:

$$
\begin{aligned}
{}_aD_z^{-\nu}\ {}_aD_z^{-\mu}\ f(z) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^z (z-w)^{\nu-1} \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^w (w-t)^{\mu-1} f(t)\, dt\, dw \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)} \int_a^z f(t) \int_t^z (z-w)^{\nu-1} (w-t)^{\mu-1}\, dw\, dt \\
&\qquad \text{(usando [1])} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu+\mu)} \int_a^z f(t)\, (z-t)^{\nu+\mu-1}\, dt \\
&= {}_aD_z^{-\nu-\mu}\ f(z).
\end{aligned}
$$

§ **El método de Dirichlet.**

Escribimos:

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_a^x dx^1 \int_a^{x^1} dx^2 \ldots \int_a^{x^{n-1}} f(x)\, dx^n \\
&= \int_a^x f(x^n)\, dx^n \int_{R(x^n)} dx^1 \ldots dx^{n-1}
\end{aligned}
$$

[viii]

$$= \int_a^x |R(x^n)|\ f(x^n)\, dx^n$$

donde $R(x^n) = \left\{ (x^1, \ldots, x^{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \ /\ x^n \leq x^{n-1} \leq \ldots \leq x^1 \leq x \right\}$

y $|R(x^n)|$ indica la medida de Lebesgue de $R(x^n)$, $a \leq x^n \leq x$.

Se puede verificar fácilmente que

[ix] $$|R(x^n)| = \frac{(x-x^n)^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n\geq 2)$$

y escribimos entonces:

[x] $$F(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1}\, f(t)\, dt$$

y, de aquí en más, podemos repetir el proceso de extensión aplicado en el apartado anterior.

§ **El método de Riemann-Liouville [Ri], [Li].**

Se considera la ecuación diferencial ordinaria con condiciones iniciales:

[xi] $$y^{(n)} = f \;,\; y(a) = y^{(1)}(a) = \ldots = y^{(n-1)}(a) = 0.$$

Una base de soluciones del sistema homogéneo asociado está dada por x^k donde $k = 0, 1, \ldots , n-1$. Aplicamos el método de variación de los parámetros en la búsqueda de una solución particular del tipo:

[xii] $$y_p(x) = c_0(x) + c_1(x)\, x + \ldots + c_{n-1}(x)\, x^{n-1}.$$

La matriz wronskiana correspondiente es:

[xiii] $$W(x) = \left\| \begin{matrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^{n-1} \\ 0 & 1 & 2x & \ldots & (n-1)x^{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (n-1)! \end{matrix} \right\| = (w_{ij})$$

y si escribimos $W(x) = (w^{ij})$ se tiene:

[xiv] $$w^{ij}(x) = \begin{cases} (-1)^{j-i} \dfrac{x^{j-i}}{i!(j-i)!} & \text{si } 0 \leq i \leq j < n, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se puede ver que:

[xv] $$c_k'(x) = w^{k,n-1}(x)\, f(x)$$

para $k = 0, 1, \ldots, n-1$, de modo que

[xvi] $$c_k(x) = \frac{(-1)^{n-1-k}}{k!(n-1-k)!} \int_a^x t^{n-1-k} f(t)\, dt$$

y, reemplazando [xvi] en [xii] vemos que:

$$y_p(x) = \sum_{k=o}^{n-1} \frac{(-1)^{n-1-k}}{k!(n-1-k)!} x^k \int_a^x t^{n-1-k} \quad f(t)\, dt$$

$$= \int_a^x f(t) \sum_{k=o}^{n-1} \frac{(-t)^{n-1-k}}{k!(n-1-k)!} x^k\, dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\, dt$$

y estamos nuevamente en las condiciones de los apartados anteriores.

§ El punto de vista de Nekrassov (1888) [N].

Se considera la célebre fórmula de Cauchy:

[xvii] $$D_z^n f(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta$$

en la cual C es una curva cerrada suave, contenida en un dominio del plano complejo sobre el cual f es analítica.

Es natural escribir:

[xviii] $$D_z^\nu f(z) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{\nu+1}} d\zeta .$$

Fijados $z \varepsilon \mathbb{C}$ no nulo, $|z| > \xi > 0$, consideremos la curva cerrada C_ξ cuya gráfica consiste en el segmento de recta que parte de cero y termina en el punto $P_\xi = (1 - \xi|z|^{-1})z$, seguido del círculo centrado en z de radio ξ recorrido una vez, desde P_ξ, en sentido anti-horario y, finalmente, una vez más el segmento original pero recorrido desde P_ξ al orígen. Vamos a considerar:

[xix] $$\zeta^a = \exp\{a[\ln|\zeta| + i\ \mathrm{Arg}\ (\zeta)]\}$$

con ζ no nulo y $-\pi \le \mathrm{Arg}\ (\zeta) < \pi$. Podemos escribir:

[xx]
$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{\nu+1}}\, d\zeta = \oint_{C_\xi} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{\nu+1}}\, d\zeta$$

$$= \left[1 - e^{-2\pi i(\nu+1)}\right] \int_o^{P_\xi} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{\nu+1}}\, d\zeta + i\int_o^{2\pi} \frac{f(z+\xi\ e^{it})}{(\xi\ e^{it})^{\nu}}\, dt.$$

Si se hace tender ξ a cero, la integral de la derecha se anulará toda vez que $\mathrm{Re}(\nu) < 0$, resultando:

[xxi]
$$\frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{\nu+1}}\, d\zeta =$$

$$= \frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i} \left[1 - e^{-2\pi i(\nu+1)}\right] \int_o^z \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{\nu+1}}\, d\zeta$$

$$= \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_o^z \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{\nu+1}}\, d\zeta$$

y, en términos de la nomenclatura usada anteriormente, la expresión anterior es $D_z^\nu f(z)$, de modo que [xviii] define, efectivamente, una diferenciación de orden fraccionario.

§ El punto de vista de M. Gaer & L. Rubel

Sea G la clase de funciones complejas que son analíticas en un entorno del eje real y en el infinito, donde tienen un cero.

En particular, $G \le \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$.

Dadas $f \in G$, $t \in \mathbb{R}$, se prueba entonces [G & R] la existencia de una única función entera $F(z,t)$ de la variable z, de tipo exponencial, con $h_F(\pm \pi/2) < \infty$, t.q.

[xxii] $$F(n,t) = 1/n!\ f^{(n)}(t) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

donde:

[xxiii] $$h_F(\theta) = \lim_{r \to \infty} \sup\ r^{-1} \log |F(re^{i\theta})|.$$

Dada $f \in G$, Gaer & Rubel definen entonces:

[xxiv] $$D_t^z f(t) = z!\ F(z,t),\ z \neq -1, -2, \ldots$$

generándose, de esta manera, un Cálculo Fraccionario consistente sobre la clase G, el cual demuestran que es coincidente con el Cálculo de H. Weyl [W].

Bibliografia

[A] Niels Henrik Abel

"Solution de quelques problémes a `l´ aide d´intégrales définies"

Oeuvres Complétes, Christiania, 1881, T.I, 16 - 18.

[E, J & L] F. Emde, E. Jahnke & F. Losch

"Tables of higher functions"

McGraw - Hill, N. Y., 1960.

[E, M, O & T] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettingger & F. G. Tricomi

"Tables of Integral Transforms"

Vol. II, Mc. Graw - Hill, N. Y., 1954.

[E] Euler, L.

"De progressionibvs transcendentibvs, sev qvarvm termini generales algebraice dari negvevnt"

In Comment. Acad. Sci. Imperialis petropolitanae, 5, 36 - 57 (1738).

[FK] Fung Kang

"Generalized Mellin Transforms I"

Sci. Sinica 7, pp. 582 - 605, 1958

[Fox] Ch. Fox

"The G and H functions as symmetrical Fourier kernels"

Trans. Amer. Math. Soc., 9, no. 6 (1961), 968 - 973.

[G & R] Marvin Gaer & Lee Rubel

"The fract. derivative and entire functions"

Lect. Notes in Math., 457, Fract. Calculus and Its Appl., B. Ross (ed)

Berlín, 1974, pags. 171 - 206.

[G & S] I. M. Gélfand & G. E. Shilov

"Generalized Functions"

Vol. 1, Acad. Press, N. Y., 1964.

[G & S] H. J. Glaeske & M. Saigo

"Fract. Calculus Operators involving the Gauss function on spaces $F_{p,\mu}$ *and* $F'_{p,\mu}$*"*

Math. Nachr. 147 (1990), 285 - 306.

[G, G & S] S. P. Goyal, K. C. Gupta & H. M. Srivastava

"The H - function of one and two variables with applications"

South Asian Publ., Nueva Delhi, Madras, 1982.

[G] K. C. Gupta

"On the H - function"

Ann. Soc. Sci. Bruxelles Ser. I 79 (1965), 97 - 106.

[H, L & P] G. H. Hardy, J. E. Littlewood & G. Pölya

"Inequalities"

Cambridge, 1934.

[K, S & M] A. Kilbas, S. Samko & O. Marichev

"Integrals and derivatives of fract. order and some of their appl."

Nauka i Tekhnika, Minsk, 1987.

[La] Lacroix, S. F.

"Traité du Calcul Differérentiel et du Calcul Intégral"

Paris: Mme. V^e Courcier, 1819, Tome Troisiéme, seconde édition.

[L & McB] W. Lamb & A. C. McBride

"On relating two approaches to Fract. Calculus"

Journal of Math. Analysis and Appl. 132, 590 - 610 (1988)

[Le] G. W. Leibnitz

Carta fechada en septiembre 30 de 1695, escrita por Leibnitz a G. A. L'Hospital.

Leibnizen Mathematischen Schriften. 2(1962), Olms verlag, Hildesheim, Alemania.

[Li] J. Liouville

"Memoire sur quelques quéstions de Géometrie et de Mécanique, et sur un nouveau genre de Calcul pour résoudre ces quéstions"

Journal de l'École Polytechnique, 1832, tome XIII, XXI^{e} cahier.

[Lo] E. R. Love

"Some inequalities for fractional integrals in linear spaces and approximation"

Procc. Conf. Math. Res. Inst. Oberwolfach, 1977, Internat. Ser. Numer. Math. Vol. 40, Birkhauser, Basel, 1978.

[M & S1] A. M. Mathai & R. K. Saxena

"The H - function with appl. in Statistics and other disciplines"

Wiley Eastern Ltd.,1978.

[M & S2] A. M. Mathai & R. K. Saxena

"Generalized Hypergeometric Functions with Applications in Statistics and Physical Sciences"

Lect. Notes in Math., Vol. 348, Springer - Verlag, Berlín, Heidelberg, N.Y., 1973

[McB1] A. C. McBride

"Fractional powers of a class of ordinary differential operators"

Proc. London Math. Soc. (3) 45 (1982), 519 - 546.

[McB2] A. C. McBride.
"A Mellin Transform approach to Fract. Calculus on (0, +∞)".
A. C. McBride & G. F. Roach eds., *Fract. Calculus*, Pitman Adv. Publ. Program, Londres, 1985, 99 - 139.

[M] Miklós Mikolás
"On the recent trends in the development, theory and appl. of Fractional Calculus"
Lect. Notes in Math., 457, Fract. Calculus and Its Appl., B. Ross (ed) Berlín, 1974, pags. 357 - 375.

[N] Nekrasov, P. A.
- *"General Differentiation"*
(Russian) Mat. Sb., 14, Vyp. 1, 45 - 168 (1888)
- *"An Application of General Differentiation to integration of Equations of the Form* $\sum (a_s + b_s x)\, x^s D^s y = 0$*"*
(Russian) Ibid., 344 - 393 (1888).
- *"An Application of General Differentiation to a Problem of Reducing of Multidimensional Integrals (In Connection With Integration of the Laplace Equation)"*
(Russian) Ibid., 410 - 426 (1888).

[Ok] G. O. Okikiolu
"Aspects of the theory of bounded integral operators in $\mathbb{L}^p$ *spaces"*
London - N.Y. - Acad. Press (1971)

[Os] Thomas Osler
"Open questions for research"
Lect. Notes in Math., 457, Fract. Calculus and Its Appl., B. Ross (ed) Berlín, 1974, pags. 376 - 381.

[P1] Carlos C. Peña

"Integración Fraccionaria Iterada"

Actas del 2do. Congreso Dr. A. R. Monteiro, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1993, pags. 79 - 93.

[P2] Carlos C. Peña

"Sobre los Espacios de la Transformada de Mellin"

IAM - CONICET - FCEyN (UBA), PREPRINT 195, 1993

[P3] Carlos C. Peña

"Sobre los espacios $\mathfrak{M}_r$ *y los espacios de McBride"*

IAM - CONICET - FCEyN (UBA), PREPRINT 234, 1994

[P4] Carlos C. Peña

"On some classes of operators derived from itered R - L fractional differentiation".

Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica. Nova Serie (1995).

[R & S] R. K. Raina & M. Saigo

"A note on Fract. Calculus Operators involving Fox's H - function on space $F_{p,\mu}$*"*

Recent Adv. in Fract. Calculus, R. N. Kalia (ed.), U.S.A., 1993.

[Ri] Riemann, B.

"Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation".

Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher. Leipzig: Teubner, 331 - 344 (1876)

[Roo] P. G. Rooney.

"On the ranges of certain fractional integrals".

Canad. Journal Math., 24 (1972), 1198 - 1216.

[R1] Bertram Ross

"A brief history and exposition of the fundamental theory of Fractional Calculus"

Lect. Notes in Math., 457, Fract. Calculus and Its Appl., B. Ross (ed) Berlin, 1974, pags. 1 - 36.

[R2] Bertram Ross

"The development of the gamma function and a profile of Fractional Calculus"

N. Y. University Dissertation, 1974, Ch. V, pp. 142 - 210. University Microfilms, Ann Arbor, Mich. # 74 - 17154, PO # 45122.

[Sa] M. Saigo

"A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions"

Math. Rep. College General Ed. Kyushu Univ. 11 (1978), 135 - 143.

[Sc] I. Schur

J. für Math. 140 (1911), 1 - 28.

[Sk] P. Skibinski

"Some expansion theorems for the H - function"

Ann. Polon. Math. 23 (1970), 125 - 138

[W] H. Weyl

"Bemerkungen zum Begriff des Differentialquotienten gebrochner Ordnung Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich", 62, (1917), pp. 296 - 302.

[Z] A. H. Zemanian

"Generalized Integral Transformations"

Pure and Applied Math., Vol. XVIII, John Wiley & Sons, Inc., 1968.